HLMA509

Corrigé de l'examen du 26 novembre 2018

Exercice 2 $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

① polynôme caractéristique $\chi_B(X) = (5-X)(3-X) - 3 = X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X-6)$

valeurs propres : 2 et 6 (B est donc diagonalisable)

sous-espaces propres :

$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \qquad E_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

② On pose $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

On a alors $P^{-1}BP = D$ où $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

③ Soit M telle que $M^2 + M = B$. On pose $N := P^{-1}MP$

(a) $N^2 + N = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) + P^{-1}MP$

$= P^{-1}M^2P + P^{-1}MP$

$= P^{-1}(M^2 + M)P$

$= P^{-1}BP = D$

donc $N^2 + N = D$

(b) On a par conséquent

$ND = N(N^2+N) = N^3 + N^2 = (N^2+N)N = DN$

donc $ND = DN$

(c) posons $N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

alors $ND = DN$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2a & 6b \\ 2c & 6d \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 6c & 6d \end{bmatrix}}$$

ce qui <u>équivaut</u> à $\begin{cases} 6b = 2b \\ 2c = 6c \end{cases}$, donc à $b = c = 0$

Ainsi : $ND = DN \iff N$ est diagonale

(d) posons donc $N = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

alors $N^2 + N = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+a & 0 \\ 0 & d^2+d \end{bmatrix}$

et ainsi :

$$N^2 + N = D \iff \begin{cases} a^2 + a = 2 \\ d^2 + d = 6 \end{cases}$$

Or $a^2 + a = 2 \iff a = 1$ ou $a = -2$ $\qquad a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$

$d^2 + d = 6 \iff d = 2$ ou $d = -3$ $\qquad d^2 + d - 6 = (d-2)(d+3)$

Il y a donc exactement quatre matrices N telles que $N^2 + N = D$:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ N_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } N_4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(e) il y a donc exactement quatre matrices M telles que $M^2 + M = B$:

$M_1 = PN_1P^{-1}$, $M_2 = PN_2P^{-1}$, $M_3 = PN_3P^{-1}$ et $M_4 = PN_4P^{-1}$

(!) $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$