Année 2018-2019
L3 — SV Concours
HLMA509 Mathématiques

Feuille d'exercices no.2 : Fonctions

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la fonction dérivée sur ce domaine : (a) $a(x) = (x+1)e^{3x}$; (b) $b(x) = (2x+1)/(x^2+1)$; (c) $c(x) = \sin(2x^3 - 1)$; (d) $d(x) = \sqrt{x^2-1}$; (e) $e(x) = e^{x^2}$; (f) $f(x) = 3^x$; (g) $g(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$; (h) $h(x) = e^{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$.

Exercice 3. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$, au point d'abscisse $a = 2$. Montrer que le graphe de la fonction est en-dessous de cette tangente.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln x)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln(\sin x) - \ln x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{1}{x(x-1)}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}}$

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) := x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

(1) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

(2) On admet que $x - x^2/2 - x^3/3 \leq \ln(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3$ pour tout $x > 0$. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$.

Exercice 6. Soit $f : [0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sqrt{\tan x}$.

(1) Montrer que f est une bijection de $[0, \pi/2[$ sur un intervalle J à déterminer.

(2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x) + 2$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à déterminer. On note f^{-1} la bijection réciproque.

(2) Donner le tableau de variations de f^{-1}, et préciser les valeurs ou les limites aux bornes de J.

(3) Quelle relation géométrique y a-t-il entre le graphe de f et le graphe de f^{-1} ? Tracer ces graphes dans un même repère.

(4) Montrer que le graphe de f^{-1} admet une asymptote horizontale.

(5) Donner l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point d'abscisse 1.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(x) - 1/x$.

(1) Etudier les branches infinies de f.

(2) Etudier les variations et la convexité de f.

(3) Donner l'allure de la représentation graphique de f.

(4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) := 0$ et $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.

(3) La fontion f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10. Étudier les fonctions suivantes : (i) $f(x) = \cos^2(x) - \cos(x) + 1$; (ii) $g(x) = (x^2+1)/(x^2-1)$; (iii) $h(x) = xe^x$.

Exercice 11. (1) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

(2) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n := (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$. Donner un encadrement du terme général u_n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes : (i) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$; (ii) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Exercice 13. (1) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

(2) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n := (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$. Donner un encadrement du terme général u_n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 14. On cherche à déterminer les couples $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $n^p = p^n$. Pour cela, prendre le logarithme de l'égalité et regrouper ; montrer qu'il s'agit alors de résoudre une équation de la forme $f(n) = f(p)$ pour une certaine fonction f ; étudier la fonction f, puis conclure.