Exercice 5 (X,d) métrique $A \subseteq X$ A compacte non vide $r>0$

$$K_r := \bigcup_{a\in A} D(a,r)$$

① Si $x \in K_r$, c'est qu'il existe un $a \in A$ tel que $x \in D(a,r)$, c-à-d tel que $d(x,a) \leq r$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de K_r, on peut choisir pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un tel point $a_n \in A$ pour lequel $d(a_n, x_n) \leq r$.

On obtient ainsi une suite de points de A qui possède la propriété voulue

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \cdots \\ \updownarrow d\leq r & \updownarrow d\leq r & \updownarrow d\leq r & \cdots & \updownarrow d\leq r \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \cdots \end{array}$$

② Soit (x_n) une suite de points de K_r qui converge vers un point $x \in X$.

On veut montrer que $x \in K_r$.

Comme dans ①, soit (a_n) une suite de points de A telle que $d(a_n, x_n) \leq r \ \forall n$.

Comme A est <u>compact</u>, cette suite admet une sous-suite convergente dans A. Il existe donc une extraction φ telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a \in A$.

Mais alors :

$$\underbrace{d(x_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n)})}_{\leq r \ \forall n} \xrightarrow[n\infty]{} d(x,a) \quad \text{car } \underbrace{x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} x}_{\text{puisque } x_n \xrightarrow[n\infty]{} x} \text{ et } a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$$

Et donc, par passage à la limite d'une inégalité <u>large</u> : $d(x,a) \leq r$, autrement dit $x \in D(a,r)$, et par conséquent $x \in \bigcup_{a\in A} D(a,r) = K_r$ comme on voulait le prouver. Donc K_r est (séquentiellement) fermé dans X.

③ Pour montrer que $K_{1/2}$ est séquentiellement compact, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $K_{1/2}$ (on veut montrer qu'elle admet une sous-suite convergente).

On reprend le raisonnement et les notations de ② : à (x_n) on associe une suite (a_n) de A, dont on extrait une sous-suite $\underbrace{\text{convergente}}_{\text{dans } A}$ $(a_{\varphi(n)})$

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a \in A$$

(!) On observe que $x_{\varphi(n)} \in D(a,1)$ pour tout n assez grand.

En effet : $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \underbrace{d(x_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n)})}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{d(a_{\varphi(n)}, a)}_{\downarrow n\infty \ 0}$

et donc $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq 1$ à partir d'un certain rang.

Or $D(a,1)$ est supposé compacte. Donc la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, dont les termes sont tous dans $D(a,1)$ à partir d'un certain rang, possède une sous-suite convergente. Mais une suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc il existe une extraction ψ telle que $x_{\psi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} x$ dans X (et telle que $a_{\psi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$ encore ...)

(!) il reste à montrer que $x \in K_{1/2}$!

On a $d(x_{\psi(n)}, a_{\psi(n)}) \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$x_{\psi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} x, \qquad a_{\psi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} a$$

d'où $d(x,a) \leq \frac{1}{2}$ en passant à la limite, autrement dit $x \in K_{1/2}$

Ainsi toute suite de points de $K_{1/2}$ possède une sous-suite qui converge <u>dans $K_{1/2}$</u>. Donc $K_{1/2}$ est séquentiellement compact.

Exercice 6 $\quad$ E Banach $\quad E \xrightarrow{f} E$ contraction

① Si $(id-f)(x) = (id-f)(x')$, c'est que $x - f(x) = x' - f(x')$

c-à-d $x' - x = f(x') - f(x)$

d'où $\|x'-x\| = \|f(x') - f(x)\| \leq k \|x'-x'\|$

et donc $\|x'-x\| = 0$ puisque $0 \leq k < 1$

d'où $x = x'$

Ainsi $id_E - f$ est injective.

② Soit $y \in E$ $\quad \Phi_y(x) := y + f(x)$

(a) $\Phi_y : E \to E$ est une contraction, comme f :

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(x')\| = \|y + f(x) - y - f(x')\| = \|f(x) - f(x')\| \leq k \|x - x'\|$$

D'après le théorème du point fixe de Banach, elle admet donc un (unique) point fixe.

(b) Or $\Phi_y(x) = x \iff y + f(x) = x$

$$\iff y = x - f(x) = (id_E - f)(x)$$

Donc y appartient à l'image de $id_E - f$.

③ Donc $id_E - f$ est bijective (injective et surjective)

④ (a) $\|(id_E - f)(x) - (id_E - f)(x')\| = \|x - x' + f(x') - f(x)\|$

$$\leq \|x - x'\| + \|f(x') - f(x)\|$$

$$\leq \|x - x'\| + k\|x - x'\| = (1+k)\|x - x'\|$$

Donc $id_E - f$ est $(1+k)$-lipschitzienne

(b) Soient $y, y' \in E$.

Alors $x := (id_E - f)^{-1}(y)$ et $x' := (id_E - f)^{-1}(y')$

vérifient $x - f(x) = y$ et $x' - f(x') = y'$ (par définition)

$$\text{Donc } \|x - x'\| = \|f(x) + y - f(x') - y'\|$$
$$\leq \|f(x) - f(x')\| + \|y - y'\|$$
$$\leq k\|x - x'\| + \|y - y'\|$$

c-à-d $(1-k)\|x - x'\| \leq \|y - y'\|$

donc $\|x - x'\| \leq \dfrac{1}{1-k}\|y - y'\|$ $\quad (k \neq 1 \text{ !})$

Ainsi $(id_E - f)^{-1}$ est lipschitzienne.

(c) $id_E - f$ est une bijection de E sur lui-même,

$id_E - f$ et $(id_E - f)^{-1}$ sont continues (car lipschitziennes)

donc $id_E - f$ est un homéomorphisme de E sur lui-même.

Exercice 7

① $\begin{aligned} \Phi : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Phi(u) = \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \end{aligned}$ est bien défini puisque la somme $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ est en fait finie (la suite u est nulle à partir d'un certain rang)

Φ est linéaire :

$$\begin{cases} \Phi(u+v) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n + v_n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{v_n}{n} = \Phi(u) + \Phi(v) \\ \Phi(\lambda u) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda u_n}{n} = \lambda \sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} = \lambda \Phi(u) \end{cases}$$

(toutes ces sommes sont finies)

② $$|\Phi(u)| = \left|\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|u_n|}{n} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}}}_{C} \underbrace{\sqrt{\sum_{n\geq 1} u_n^2}}_{\|u\|}$$ inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$

donc ϕ est linéaire continue, et $|||\phi||| \leq c$

③ Si on avait $\phi(u) = \langle a, u \rangle \ \forall u \in E$, avec $a = (a_n) \in E$

alors en particulier pour $u = (1, 0, 0, \cdots)$ puis $u = (0, 1, 0, 0, \cdots)$ etc...

on obtiendrait : $1 = a_1$, puis $\frac{1}{2} = a_2$, etc... et $\frac{1}{n} = a_n$ de manière générale

Or $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ n'est pas dans E.

Donc un tel a n'existe pas

④ Donc le théorème de Riesz ne s'applique pas ... C'est donc que E n'est pas un espace de Hilbert.

⑤ On montre que $|||\phi||| = c$ $\quad \left(c = \sqrt{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}}\right)$

en construisant une suite de suites a_n :

$$a_n = (\underbrace{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}}, 0, 0, \cdots)$$

$$\phi(a_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \|a_n\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$$

$$\text{donc} \quad \frac{|\phi(a_n)|}{\|a_n\|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \xrightarrow[n \infty]{} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = c$$