Année 2018-2019 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

Examen (16 janvier 2018)
durée : 3h

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. Soit (X,d) un espace métrique.

1. Montrer que toute suite de Cauchy de X est bornée.
2. Montrer que si une suite de Cauchy de X possède une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.
3. Montrer que si X est compact, alors X est complet.

Utiliser les définitions : suite de Cauchy, valeur d'adhérence d'une suite, compacité (séquentielle).

Exercice 2. Soit X un espace métrique compact.

1. Soit $f : X \to Y$ une application continue à valeurs dans un espace métrique quelconque. Montrer que $f(X)$ est un compact de Y.
2. En déduire que si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue (toujours en supposant X compact), alors f est bornée et atteint ses bornes.

On peut utiliser la compacité séquentielle et la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, et soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires continues. Montrer que $|||v \circ u||| \leq |||v|||\,|||u|||$, pour les normes d'opérateurs associées.

Exercice 4. Soient E, F des espaces vectoriels normés. On munit l'ensemble des applications linéaires continues $\mathscr{L}_c(E,F)$ de la « norme triple » associée. Montrer que si F est complet, alors $\mathscr{L}_c(E,F)$ est également complet.

Bien détailler toutes les étapes. Faire apparaître le rôle joué par la complétude de F.

Partie 2. Exercices

Exercice 5. Soient (X, d) un espace métrique, et A une partie non vide compacte de X. Pour $r > 0$, on pose

$$K_r := \bigcup_{a \in A} D(a, r),$$

où $D(a, r)$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K_r. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A telle que $d(x_n, a_n) \leq r$ pour tout n.
2. Montrer que K_r est une partie fermée de X.
3. On suppose de plus que, pour chaque point $x \in X$, la boule fermée $D(x, 1)$ est compacte. Montrer qu'alors $K_{1/2}$ est compact. *On peut utiliser la compacité séquentielle.*

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé complet (espace de Banach). Soit $f : E \to E$ une application telle qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ pour lequel :

$$\forall x, x' \in E, \quad \|f(x') - f(x)\| \leq k\|x' - x\|.$$

Autrement dit, f est k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$. On s'intéresse à $\mathrm{id}_E - f$: c'est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x - f(x)$.

1. Soit $y \in E$ quelconque. Montrer que l'application $\phi_y : E \to E$ définie par $\phi_y(x) := y + f(x)$ possède un unique point fixe.
2. En déduire que $\mathrm{id}_E - f$ est une bijection. *N.B. Qu'est-ce qu'une bijection ? Quel rapport avec la question précédente ?*
3. Montrer que l'application réciproque $(\mathrm{id}_E - f)^{-1}$ est $\frac{1}{1-k}$-lipschitzienne. En déduire que $\mathrm{id}_E - f$ est un homéomorphisme de E sur lui-même.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$$

N.B. On admet que $\langle u, v \rangle$ est bien un produit scalaire sur E. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que ϕ est bien définie, et linéaire. Montrer ensuite qu'elle est linéaire *continue*, et donner une majoration de sa norme.
2. Existe-t-il un élément $a \in E$ tel que $\langle a, u \rangle = \phi(u)$ pour tout $u \in E$? Que peut-on en déduire sur E muni de ce produit scalaire ?
3. Calculer la norme de ϕ.