



FEUILLE D'EXERCICES NO.1

1. Calculs élémentaires

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{8}}{3}$; (b) $\frac{2}{4}$ et $\frac{\frac{2}{3}}{4}$; (c) $\frac{2^{1/4} 3^{3/4}}{\sqrt{6}}$; (d) $(\sqrt{2}\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$; (e) $2^{\frac{1}{\ln 2}}$; (f) $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$; (g) $2 \ln(\sqrt{e^x}) - x$.

Exercice 2. Calculer : (a) $(-2)^4$; (b) -2^4 ; (c) 2^{-4} ; (d) $8^{-2/3}$.

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes : (a) $4x^2 - 9$; (b) $2x^2 - x - 6$; (c) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; (d) $x^3 + 8$; (e) $(x - 1)(x^2 + 1) + 2x(x - 1)$.

Exercice 4. Donner une écriture plus simple des expressions suivantes : (a) $\ln((-2)^2)$; (b) $\exp(10 \ln(2))$; (c) $\ln(100) - 2 \ln(2) - \ln(5)$.

Exercice 5. Compléter les identités remarquables : (i) $(a+b)^2 = \dots$; (ii) $(a-b)^2 = \dots$; (iii) $a^2 - b^2 = \dots$; (iv) $a^3 + b^3 = (a+b)(\dots)$; (v) $a^3 - b^3 = (a-b)(\dots)$.

2. Sommes et produits

Exercice 6. Calculer, en fonction de l'entier n , les sommes et produits suivants : (i) $\sum_{k=1}^n (-1)^k$; (ii) $\sum_{k=1}^n (-1)^n$; (iii) $\prod_{k=1}^n (-1)^k$; (iv) $\prod_{k=1}^n (-1)^n$.

Exercice 7. Déterminer a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

- (1) La somme des entiers de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.
- (2) La somme des entiers impairs de 1 à $2n - 1$ vaut n^2 .
- (3) La somme des carrés des entiers de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (utiliser la question précédente et intervertir l'ordre de sommation).

(4) En déduire la somme des carrés des entiers pairs puis la somme des carrés des entiers impairs.

$$(5) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 9. (1) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. Simplifier la somme $\sum_{k=m}^n (a_{k-1} - a_k)$.

(2) Calculer $\sum_{k=1}^n (k \times k!)$ en écrivant $k \times k!$ comme la différence de deux factorielles successives.

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k = (a_0 + a_n) \frac{n+1}{2}$.

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes : (a) $\sum_{k=1}^n (2 + 3k)^2$; (b) $\sum_{k=1}^n (k+1)(k+2)$.

Exercice 12. (1) Montrer que $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!(n+1)}$.

(2) Montrer que $(n+3)n! - (n-1)(n-1)! = (n-1)!(n+1)^2 = \frac{(n+1)!(n+1)}{n}$.

3. Dénombrement élémentaire

Exercice 13. (1) Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{0}{k}$, $\binom{1}{k}$, $\binom{2}{k}$, $\binom{3}{k}$ et $\binom{4}{k}$ pour toutes les valeurs possibles de k .

(2) Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$, en supposant pour les deux derniers que $n \geq 1$

(3) Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(4) En utilisant ces formules, déterminer tous les nombres $\binom{n}{k}$ pour $n \leq 10$ et $0 \leq k \leq n$ (triangle de Pascal).

Exercice 14. Développer $(a+b)^6$ et $(a-b)^7$ en utilisant la formule du binôme¹.

Exercice 15. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = 0$.

Exercice 16. Combien y a-t-il d'injections² d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments? Combien y a-t-il de bijections³ entre deux ensembles à n éléments?

1. Si vous ne connaissez pas la **formule du binôme**, faites une recherche sur internet.

2. Si vous ne connaissez pas la définition d'une **injection**, faites une recherche sur internet.

3. Si vous ne connaissez pas la définition d'une **bijection**, faites une recherche sur internet.