$\boxed{\text{HLMA 509 \quad Correction épreuve 14-01-2019}}$

Exercice 1 $\quad f : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} f(x) = x\, e^{\frac{x}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

(1) <u>Sur $]-1, +\infty[$</u> : f est produit et composée de fonctions continues (car le dénominateur de $\frac{x}{x+1}$ ne s'annule pas), donc elle est continue.

<u>Etude en -1</u> :

quand $x \to -1^+$, on a $x+1 \to 0^+$, donc $\frac{x}{x+1} \longrightarrow -\infty$

par conséquent : $e^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow[x \to -1^+]{} 0^+$, et donc $x\, e^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow[x \to -1^+]{} 0^-$

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to -1^+]{} 0 = f(0)$

Donc f est continue en -1

Par conséquent, f est continue sur $[-1, +\infty[$

(2) <u>Sur $]-1, +\infty[$</u> : f est produit et composée de fonctions dérivables, donc elle y est dérivable, et on a :

$$f'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} + x\left(\frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2}\right) e^{\frac{x}{x+1}} \quad \text{(dérivée d'un produit)}$$

$$= e^{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2}\, e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2}\, e^{\frac{x}{x+1}}} \quad \text{après simplifications}$$

<u>Etude en -1</u> : on étudie le taux de variations et son éventuelle limite

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{f(x)}{x+1} = \frac{x}{x+1}\, e^{\frac{x}{x+1}}$$

quand $x \to -1^+$, on a $\frac{1}{x+1} \longrightarrow +\infty$ et donc $\frac{x}{x+1} \longrightarrow -\infty$

or on sait que $X e^X \xrightarrow[X \to -\infty]{} 0$ (limite classique)

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } -1, \text{ et } f'(-1) = 0}$

③ D'après ②, sur $]-1,+\infty[$ la dérivée $f'(x)$ est du même signe que x^2+3x+1

<u>étude de $x^2+3x+1=0$</u> : $\Delta = 9-4=5$ d'où racines $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

or $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \simeq -2{,}62$ est strictement inférieur à -1

et $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}38$ appartient à l'intervalle $]-1,0[$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$*$	$\nearrow$	$+\infty$

$* \; f\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -0{,}2$

<u>limite en $+\infty$</u> : quand $x \to +\infty$, on a $\dfrac{x}{x+1} \longrightarrow 1$ donc $e^{\frac{x}{x+1}} \to e$

et par conséquent $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

④ (a) On a $\dfrac{e^{1+h}-e}{h} = \dfrac{e^{1+h}-e^1}{(1+h)-1} \xrightarrow[h\to 0]{} \exp'(1) = e^1 = e$

par dérivabilité de la fonction exponentielle

On observe que $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

Posons $h = -\dfrac{1}{x+1}$: alors $h \to 0$ quand $x \to +\infty$,

et donc :

$$(1+x)\left(e^{\frac{x}{x+1}} - e\right) = \frac{-1}{h}\left(e^{1+h} - e\right) = -\frac{e^{1+h}-e}{h}$$

tend vers $-e$ quand x tend vers $+\infty$

(b) On a $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{x}{x+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} e$ $\left(\text{car } \frac{x}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1\right)$

Puis $f(x) - ex = x e^{\frac{x}{x+1}} - ex = x\left(e^{\frac{x}{x+1}} - e\right)$

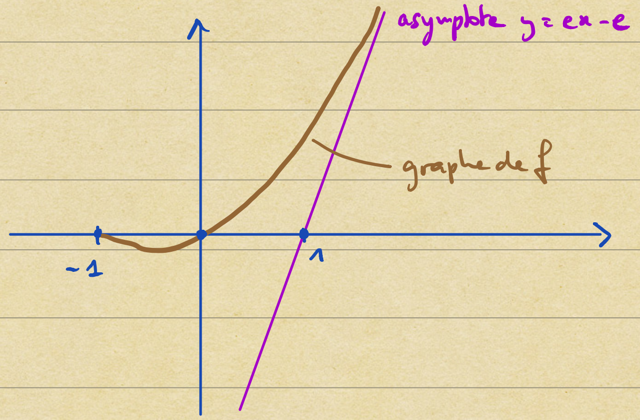
Donc :

$$f(x) - ex = \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\downarrow x \to +\infty \atop 1} \underbrace{(1+x)\left(e^{\frac{x}{x+1}} - e\right)}_{\downarrow x \to +\infty \atop -e} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -e$$

On en déduit que f possède en $+\infty$ une asymptote d'équation

$y = ex - e$

(3)



$\boxed{\text{Exercice 2}}$ $\quad I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} \, dx$

① On a $e^{-2x} \leq 1$ lorsque $x \geq 0$, en particulier pour $x \in [0,1]$

On en déduit que $0 \leq (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n \quad \forall x \in [0,1]$

(car $(1-x)^n \geq 0$ sur $[0,1]$)

Par conséquent :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[\frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{n+1} (0-1)$$

D'où $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$ et donc $\boxed{I_n \xrightarrow[n\infty]{} 0}$ par le théorème des gendarmes

② Intégration par parties :

$$2 I_{n+1} = 2\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$$

$u(x) = (1-x)^{n+1} \quad u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$

$v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$$= \left[-(1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$$

$$= \left[0 - (-1) \right]_0^1 - (n+1) I_n$$

$$= 1 - (n+1) I_n$$

d'où $\boxed{2 I_{n+1} = 1 - (n+1) I_n}$

③ On en déduit que $n I_n = \underbrace{-2 I_{n+1}}_{\downarrow n\infty \, 0} + 1 \underbrace{- I_n}_{\downarrow n\infty \, 0}$ c-à-d $\boxed{n I_n \xrightarrow[n\infty]{} 1}$

Puis $n(n I_n - 1) = n \left(-I_n - 2 I_{n+1} \right) = -n I_n - 2n I_{n+1}$

d'où $n(n I_n - 1) = \underbrace{-n I_n}_{\downarrow -1} - 2 \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow 1} \underbrace{(n+1) I_{n+1}}_{\downarrow 1}$ et ainsi : $\boxed{n(n I_n - 1) \xrightarrow[n\infty]{} -3}$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ Résolution de $y'(x) - \frac{x}{x^2-1}\,y(x) = 2x$ sur $]1,+\infty[$

<u>équation homogène associée</u> : (H) $y'(x) - \frac{x}{x^2-1}\,y(x) = 0$

Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$y_H(x) = k\exp(A(x))$ où $A(x)$ est une primitive de $\frac{x}{x^2-1}$

On observe que $\frac{x}{x^2-1}$ est $\frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2-1$

d'où $A(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ par exemple

<u>rem</u> : on a bien $x^2-1>0$ sur $]1,+\infty[$

Les solutions de (H) sont donc les fonctions

$y_H = k\sqrt{x^2-1}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

<u>solution particulière</u>

par exemple par la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de l'équation totale sous la forme

$y(x) = k(x)\sqrt{x^2-1}$ où k est une fonction dérivable à déterminer.

Alors $y'(x) = k'(x)\sqrt{x^2-1} + k(x)\,\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

d'où $y'(x) - \frac{x}{x^2-1}\,y(x) = k'(x)\sqrt{x^2-1} + \cancel{k(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} - \cancel{\frac{x}{x^2-1}\,k(x)\sqrt{x^2-1}}$

Ainsi y est solution de l'équation totale si et seulement si $k'(x)\sqrt{x^2-1} = 2x$

or $k'(x)\sqrt{x^2-1} = 2x \iff k'(x) = \underbrace{\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}_{\text{de la forme } 2\frac{u'}{\sqrt{u}}}$

D'où $k(x) = 2\sqrt{x^2-1}$ (+ cte)

<u>solution générale</u> La solution générale de l'équation totale est donc :

$\boxed{y(x) = k\sqrt{x^2-1} + 2x^2 - 2}$ avec $k \in \mathbb{R}$