Licence 2 - 2018/2019

HLMA304 : Arithmétique

Thierry Mignon

Octobre 2018

Contrôle continu

Durée : 1h15 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. *(Cours)*

(1) Énoncer et démontrer le lemme de Gauss.

(2) Soit p un nombre premier et k un entier tel que $1 < k < p$. Montrer que p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$. Montrer que ce résultat est faux si p n'est pas premier.

Exercice 2. Sachant que $12079233 = 75968 \times 159 + 321$ déterminer le reste de la division euclidienne de 12079233 par 159.

Exercice 3.

(1) Calculer le pgcd, d, de 255 et 141 ; trouver deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$255u + 141v = d$$

(2) Soit a un entier relatif. Déterminer le pgcd d des entiers $m = 14a+3$ et $n = 21a+4$; trouver deux entiers u et v tels que

$$mu + nv = d.$$

Exercice 4.

(1) Montrer que si $n + m$ est pair, il en est de même pour $n - m$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $n^2 - m^2 = 30$.

Exercice 5.

(1) Soit p un nombre premier, et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels tels que : $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. On pose :

$$a = p^\alpha,\ b = p^\beta,\ c = p^\gamma.$$

Déterminer $\text{pgcd}(a, b, c)$ et $\text{ppcm}(a, b, c)$. A quelle condition a-t-on :

$$\text{pgcd}(a, b, c) \times \text{ppcm}(a, b, c) = abc.$$

(2) Soit maintenant $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\text{pgcd}(a, b)$, $\text{pgcd}(b, c)$ et $\text{pgcd}(a, c)$ pour avoir :

$$\text{pgcd}(a, b, c) \times \text{ppcm}(a, b, c) = abc$$