Année 2018-2019
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit E un espace préhilbertien. Montrer que si $x, y \in E$ vérifient $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$, alors x et y sont colinéaires.

Exercice 2. On se place dans l'espace de Hilbert ℓ^2. Soit F le sous-espace vectoriel donné par :

$$F = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{2n} = -x_{2n+1}\}$$

Déterminer le projeté de la suite $(0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$ sur F.

Exercice 3. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit C l'ensemble des $f \in E$ telles que $\int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx = 1$.

1. Montrer que C est une partie convexe non vide de E.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = d(0, C)$.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert, et soit C une partie convexe non vide de H. Montrer que la projection p de H sur C est 1-lipschitzienne.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert. L'**orthogonal** $A^\perp$ d'une partie $A \subseteq H$ est défini par

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}$$

1. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
2. Montrer que $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H qui contient A.
3. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de H, alors $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 6. Soient H un espace de Hilbert

1. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrer que F hérite du produit scalaire de H et devient lui-même un espace de Hilbert.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de H, avec $F \subseteq G$. Montrer que $p_F^H = p_F^G \circ f_G^H$, où p_B^A désigne la projection de A sur B.

Exercice 7. Soient H et K des espaces de Hilbert, et soit $u \in \mathcal{L}_c(H, K)$ une application linéaire continue. Le but de cet exercice est de définir l'**adjoint** u^* de u et d'en donner quelques propriétés.

1. Montrer que pour tout $y \in K$ il existe un unique élément de H, noté $u^*(y)$, tel que :

$$\forall x \in H, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

2. Montrer que l'application $u^* : K \to H$ ainsi définie est linéaire.
3. Montrer que u^* est continue, et que $\|u^*\| \leq \|u\|$.
4. Montrer que $(u^*)^* = u$. En déduire que $\|u^*\|\|u\|$.
5. Montrer que $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.
6. Montrer que $\ker(u^*) = (\mathrm{im}(u))^\perp$ et que $\overline{\mathrm{im}(u^*)} = (\ker(u))^\perp$.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert. Une **base hilbertienne** de H est une famille orthonormée de vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3 \dots)}$.

1. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des « suites élémentaires » est une base hilbertienne de H.
2. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Un espace métrique X est dit **séparable** s'il existe une partie *dénombrable* A dense dans X.

1. Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.
2. Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable, par exemple de la manière suivante : si $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une famille dénombrable quelconque d'éléments de ℓ^∞, construire un nouvel élément $x \in \ell^\infty$ tel que $d(x, x_n) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et conclure.
3. Soit E un espace de Banach séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E dense dans la boule unité fermée $D(O_E, 1)$. Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, on pose $\phi(a) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$.
   a) Montrer que l'application $\phi : \ell^1 \to E$ est bien définie, linéaire, continue avec $\|\phi\| \leq 1$.
   b) On cherche à montrer que ϕ est surjective.
      i. Expliquer pourquoi il suffit de montrer que tout $x \in E$ de norme 1 est dans l'image de ϕ.

ii. Soit $x \in E$ de norme 1. Construire par récurrence une suite strictement croissante d'indices $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \|2^k x - 2^k x_{n_1} - 2^{k-1} x_{k-1} - \cdots - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2}$$

En déduire une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^1 telle que $\phi(a) = x$.

c) Montrer que $\|\phi\| = 1$.

Exercice 10. Soit X un espace métrique compact. On note E l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ qui sont lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose

$$L(f) := \inf\{k \geq 0 \mid \forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x')\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.
2. Pour $X = [0, 1]$ usuel, montrer que E n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par exemple, pourquoi existe-t-il une suite de fonctions lipschitziennes qui converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$, et pourquoi cela prouve-t-il la non-complétude ?
3. Pour $f \in E$, on pose $N(f) := \|f\|_\infty + L(f)$. Montrer que N est une norme sur E.
4. Montrer que (E, N) est complet.