



## Feuille d'exercices 5

**Exercice 1.** Montrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon, et l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon (on suppose les rayons non nuls).

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Si  $A, B$  sont deux parties de  $E$ , on pose  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

1. Montrer que si  $A$  est ouverte, alors  $A + B$  est ouverte.
2. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compactes, alors  $A + B$  est compacte.
3. Montrer que si  $A$  est compacte et  $B$  est fermée, alors  $A + B$  est fermée.
4. Trouver un exemple, dans  $\mathbb{R}^2$  usuel, avec  $A$  et  $B$  fermées mais  $A + B$  non fermée.

**Exercice 3.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telles que  $f(0) = 0$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $N_1(f) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$  et  $N_2(f) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + f'(x)|$ . Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes équivalentes sur  $E$ .

**Exercice 4.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  comme une application linéaire  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Déterminer sa norme  $\|A\|$  lorsque :

1. On prend la norme  $\|\cdot\|_\infty$  au départ et à l'arrivée.
2. On prend la norme  $\|\cdot\|_1$  au départ et la norme  $\|\cdot\|_\infty$  à l'arrivée.

**Exercice 5.** On considère une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  comme un endomorphisme  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

1. On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Montrer qu'alors  $\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .
2. On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Montrer qu'alors  $\|A\| = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ .

**Exercice 6.** On se place dans l'espace vectoriel normé  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  avec  $\|\cdot\|_1$ . Soit  $g \in E$  fixée. On définit alors une forme linéaire  $\Phi_g : E \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\Phi_g(f) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Montrer que  $\Phi_g$  est continue et trouver sa norme  $\|\Phi_g\|$ .

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX_n \in E$ , on pose  $\|P\|_\infty := \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$ ,  $\|P\|_1 := |a_0| + \dots + |a_n|$  et  $\|P\|_2 := \sqrt{a_0^2 + \dots + a_n^2}$ . La forme linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(P) = P(1)$  est-elle continue pour ces normes ?

**Exercice 8.** Soient  $E$  un espace vectoriel normé, et  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. On note  $H = \ker \phi$ .

1. Montrer que si  $\phi$  est continue, alors  $H$  est fermé dans  $E$ .
2. Montrer que si  $\phi$  n'est pas continue, alors  $H$  est dense dans  $E$ .
3. Donner un exemple pour chacun des cas précédents.

**Exercice 9.** Le but de l'exercice est de démontrer que  $(c_0)' \cong \ell^1$ , où  $c_0$  est l'espace vectoriel des suites réelles convergent vers 0, muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

1. Soit  $\phi \in (c_0)'$ . On pose  $\alpha_n := \phi(e_n)$ , où  $e_n$  est la suite  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$  avec un 1 au  $n$ -ème rang. On veut montrer que  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $\ell^1$ . Pour cela :
  - a) Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\varepsilon_n := 1$  si  $\alpha_n \geq 0$  et  $\varepsilon_n = -1$  si  $\alpha_n < 0$ . Puis on définit  $y_n := (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0, 0, \dots)$ . Montrer que  $0 \leq |\phi(y_n)| \leq \|\phi\|$ .
  - b) En déduire que  $|\alpha_0| + \dots + |\alpha_n| \leq \|\phi\|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - c) En déduire que  $\alpha \in \ell^1$ , et que  $\|\alpha\|_1 \leq \|\phi\|$ .
2. Soit  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartenant à  $\ell^1$ . Pour chaque  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$  est absolument convergente. En déduire que l'application  $\phi : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$  est bien définie, linéaire, continue, et que  $\|\phi\| \leq \|\alpha\|_1$ .
3. Conclure.

**Exercice 10.** Soient  $E$  un espace vectoriel normé, et  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue non nulle. On choisit un  $a \notin \ker(\phi)$ . Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\|\phi\| = \frac{|\phi(a)|}{d(a, \ker \phi)}$$

1. Pour commencer : pourquoi peut-on diviser par  $d(a, \ker \phi)$  ?
2. Observer que  $|\phi(a - x)| \leq \|\phi\| \|a - x\|$  pour tout  $x \in \ker \phi$ . En déduire que  $|\phi(a)| \leq \|\phi\| d(a, \ker \phi)$ .
3. Si  $x \in E$  vérifie  $\|x\| = 1$ , montrer que  $|\phi(x)| d(a, \ker \phi) \leq |\phi(a)|$ , en observant que  $\phi(x)a - \phi(a)x$  appartient à  $\ker \phi$ . Conclure.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 11.** Soient  $N$  et  $N'$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $N$  et  $N'$  sont équivalentes si et seulement si toute suite qui converge au sens de l'une est convergente au sens de l'autre.

**Exercice 12.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  différent de  $E$ , alors  $F$  est d'intérieur vide.

**Exercice 13.** Soit  $n \geq 2$  un entier. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur  $M_n(\mathbb{R})$  qui soit invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que  $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$  quelles que soient les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 14.** Soit  $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $N(f) := \|3f + f'\|_\infty$ . Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ , et qu'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que  $\|f\|_\infty \leq N(f)$ . Les normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 15.** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  des suites réelles bornées, muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Calculer la distance :

1. de la suite constante égale à 1 au sous-espace vectoriel des suites qui convergent vers 0 ;
2. de la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sous-espace vectoriel des suites convergentes.

**Exercice 16.** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathcal{B}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 1$  si  $-1 \leq x < 0$ ,  $f(0) = 0$ , et  $f(x) = -1$  si  $0 < x \leq 1$ . Déterminer la distance de  $f$  au sous-espace vectoriel des fonctions continues.

**Exercice 17.** On considère  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On considère une forme linéaire  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \geq 0 \implies \phi(f) \geq 0$ . Montrer que  $\phi$  est continue.

**Exercice 18.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $F$  est fermé et que  $G$  est de dimension finie. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors  $F + G$  est également fermé.

1. Expliquer pourquoi il suffit de démontrer le résultat lorsque  $\dim(G) = 1$ .
2. On suppose désormais que  $G = \text{Vect}(e)$ , avec  $e \in E \setminus F$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $F + G$  qui converge vers un point  $a \in E$ .
  - a) Expliquer pourquoi on peut écrire de manière unique  $x_n = y_n + \alpha_n e$  avec  $x_n \in F$  et  $\alpha_n \in \mathbb{R}$ .
  - b) Montrer que si la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée, alors  $e$  appartient à l'adhérence de  $F$  et obtenir une contradiction.

- c) Montrer que si la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors  $a$  appartient à l'adhérence de  $F + G$ .

**Exercice 19.** On considère l'espace vectoriel  $E$  des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\sum |u_n|$  converge, muni de la norme  $\|u\| := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

1. Montrer que  $(E, \|\cdot\|)$  est complet.
2. On dit que  $u \prec v$  si  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Vérifier que  $\prec$  est une relation d'ordre sur  $E$ .
  - b) Montrer que toute suite croissante majorée de  $E$  est convergente.
  - c) Montrer que les segments  $[u, v] := \{x \in E \mid u \prec x \prec v\}$  sont compacts.