



Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Soit X un espace métrique.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.
2. Montrer qu'une réunion finie de compacts est compacte. Pourquoi est-il important de préciser « finie » ?

Exercice 2. Parmi les parties suivantes de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , déterminer lesquelles sont compactes :
(i) $[0, 1[$; (ii) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$; (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$; (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$;
(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$

Exercice 3. Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle, déterminer si les parties suivantes sont compactes : (i) l'ensemble des matrices inversibles; (ii) l'ensemble des matrices diagonales; (iii) l'ensemble des matrices de déterminant 1; (iv) l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales; (v) l'ensemble $SO(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique. Si A, B sont deux parties de X , on pose $d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

1. Montrer que ceci ne définit pas une distance sur $\mathcal{P}(X)$.
2. Si A et B sont deux compacts non vides de X , montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(A, B) = d(a, b)$.
3. Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ usuel, montrer que la conclusion de la question précédente est encore vraie si on ne suppose que A compact et B fermé.
4. Donner un exemple de deux fermés A, B de \mathbb{R}^2 tels que $d(A, B) = 0$ mais $d(x, y) > 0$ quels que soient $x \in A$ et $y \in B$.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $\lim_{u \rightarrow -\infty} \varphi(u) = -1$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = +1$. On prolonge φ à l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en posant $\varphi(\pm\infty) := \pm 1$. On pose alors :

$$d(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)| \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, et que $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ est un homéomorphisme.
2. En déduire que $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ est un espace métrique compact, et que la restriction de d à \mathbb{R} induit la topologie usuelle sur \mathbb{R} . Montrer que \mathbb{Q} est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 6. Soient A et B deux compacts disjoints d'un espace métrique (X, d) . Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Si vous avez utilisé la distance pour construire U et V , essayez maintenant de démontrer ce résultat dans un espace topologique *séparé* X , sans distance.

Exercice 7. Soit K un compact d'un espace métrique (X, d) , et soit U un ouvert de X qui contient K . Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, quel que soit $x \in X$, si $d(x, K) < r$ alors $x \in U$.

Exercice 8. Dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme, construire une suite de fonctions f_n appartenant à la boule unité fermée $D(0, 1)$, telles que $d_\infty(f_n, f_p) = 1$ quels que soient $n \neq p$. En déduire que la boule unité fermée de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas compacte.

Exercice 9. On considère l'espace vectoriel normé ℓ^∞ (suites réelles bornées) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer, en s'inspirant de l'exercice précédent, que la boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 10. Soit X un espace métrique compact. Montrer que si une suite de points de X ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle est convergente. Construire un exemple pour voir que l'hypothèse de compacité est essentielle.

Exercice 11. Soit X un espace métrique compact, et soit $f : X \rightarrow X$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$ distincts.

1. Montrer qu'il existe un point $a \in X$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in X$.
2. Montrer que ce point a est l'unique point fixe de f .

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, et soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point donné. On définit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence, en posant $x_0 := a$ et $x_{k+1} := f(x_k)$ pour $n \geq 0$. On suppose que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer qu'elle converge.

Exercices supplémentaires

Exercice 13. On se propose de redémontrer qu'un segment $[a, b]$ est compact dans \mathbb{R} . Pour cela, soit \mathcal{U} un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts de \mathbb{R} . On note B l'ensemble des nombres réels $x \in [a, +\infty[$ tels que $[a, x]$ est recouvert par une sous-famille finie de \mathcal{U} , et il s'agit de montrer que $b \in B$...

1. Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $[a, a + \varepsilon] \subseteq B$.
2. Montrer que si $a \leq x \leq y$ et si $y \in B$, alors $x \in B$.
3. En déduire que si B n'est pas majoré, ou si B est majoré et $\sup(B) > b$, alors $b \in B$.
4. Le dernier cas à étudier est celui où B est majoré et $\sup(B) \leq b$. On affirme qu'on peut alors arriver à une contradiction :
 - a) Justifier que $a < \sup(B) \leq b$. En déduire qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $] \sup(B) - \varepsilon, \sup(B) + \varepsilon [$ est contenu dans l'un des ouverts du recouvrement \mathcal{U} .
 - b) Montrer qu'il existe un nombre $x \in B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x$.
 - c) En déduire que $[a, \sup(B) + \varepsilon]$ est recouvert par une sous-famille finie de \mathcal{U} .
 - d) Conclure.

Exercice 14. Soit X un espace métrique. On considère une suite décroissante $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties compactes non vides de X .

1. Rappeler pourquoi $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ n'est pas vide.
2. Montrer que si U est un ouvert de X contenant K , alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que U contienne K_n .

Exercice 15. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On suppose que X est compact.

1. Montrer que f est une application **fermée**, au sens où l'image $f(F)$ de tout fermé F de X est un fermé de Y .
2. On suppose de plus que f est bijective. Montrer qu'alors f est un homéomorphisme.

Exercice 16. Montrer que tout métrique compact X est **séparable**, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie ou dénombrable A qui est dense dans X .

Exercice 17. On se place dans \mathbb{R}^n usuel. Si A et B sont deux parties non vides de \mathbb{R}^n , on définit une nouvelle partie $A + B$ par :

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A est ouverte, alors $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
3. Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A + B$ est fermée.

4. Trouver un exemple (dans \mathbb{R}^2) avec A et B fermées, mais $A + B$ non fermée.

Exercice 18. Soient X et Y deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application. On suppose que la restriction de f à tout compact de X est continue. Montrer qu'alors f est continue, par exemple de la manière suivante :

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $a \in X$. Que peut-on dire de l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$?
2. En déduire que f est séquentiellement continue en tout point de X .

Exercice 19. On se place dans $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_∞ . Montrer que le sous-ensemble $\{f \in X \mid f([0, 1]) = [0, 1]\}$ est fermé et d'intérieur vide.

Exercice 20. Suite de l'exercice 11. Soit X un espace métrique compact, et soit $f : X \rightarrow X$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$ distincts. On veut montrer qu'il est « facile » de trouver une approximation de l'unique point fixe de f . Pour cela, soit x_0 n'importe quel point de X . On définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, en posant $x_{n+1} := f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite réelle $(d(x_n, a))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
2. Soit $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant vers $b \in X$. Que peut-on dire de la suite $((x_{\varphi(n)+1})_{n \in \mathbb{N}}$? En déduire que $b = a$, puis que $x_n \rightarrow a$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 21. Soit K une partie compacte non vide de \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal qui contient K . Pour cela :

1. Pourquoi existe-t-il une boule fermée contenant K ?
2. Soit $\rho := \inf\{r > 0 \mid \exists x \in X, K \subseteq D(x, r)\}$. Montrer qu'il existe un point $a \in X$ tel que $K \subseteq D(a, \rho)$, ce qui prouve qu'il existe bien une boule de rayon minimal qui contient K ...
3. Si K est contenu dans $D(a, \rho)$ et dans $D(b, \rho)$ avec $a \neq b$, montrer qu'il est aussi contenu dans une boule fermée de centre $(a + b)/2$ et de rayon $r < \rho$. Que peut-on en conclure?

Exercice 22. Soit X un espace métrique compact, et soit $f : X \rightarrow X$ une application continue.

1. On pose $K_1 := f(X)$ puis, par récurrence, $K_{n+1} := f(K_n)$. Montrer que $\bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$.
2. En déduire qu'il existe un sous-ensemble non vide A de X tel que $f(A) = A$.