Topo VII - 1

Espaces de Hilbert

⚠ on ne va considérer que des espaces vectoriels réels

1 Rappels

Soit E un $\mathbb{R}$-ev

Un produit scalaire sur E = une forme bilinéaire symétrique définie positive

$E \times E \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ bilinéaire

$h(x,y) = h(y,x)$ symétrique

$h(x,x) \geq 0$ positive

$h(x,x) = 0 \iff x = 0_E$ définie

⚠ On note souvent $\langle x,y \rangle = h(x,y)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires (utile ⚠)

Conséquence : $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur E

Pas n'importe quel type de norme...

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$ identité du parallélogramme

en effet : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$\|x-y\|^2 = \dots = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$\longrightarrow$ ok

exo Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (plus généralement sur $\mathbb{R}^n$)

n'est pas issue d'un produit scalaire

(trouver des vecteurs x et y qui ne vérifient pas l'identité du ▱ ...)

Un <u>espace préhilbertien</u> (réel) = un espace vectoriel (réel) muni d'un produit scalaire

<u>Exemple</u>

① $\mathbb{R}^n$ avec $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

② $\ell^2(\mathbb{R})$ espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < +\infty$

si $x=(x_n)$ et $y=(y_n)$ appartiennent à $\ell^2(\mathbb{R})$,

alors $\langle x,y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_ny_n$ est une série absolument convergente, donc convergente

<u>en effet</u> : $2|x_ny_n| \leq \underbrace{x_n^2}_{\text{TG d'une série CV}} + \underbrace{y_n^2}_{\text{TG d'une série CV}}$ ⚠ et séries à termes <u>positifs</u>.

facile : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$

③ $C^0(\underbrace{[0,1]}_{\text{plus généralement un segment } [a,b]},\mathbb{R})$ avec $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

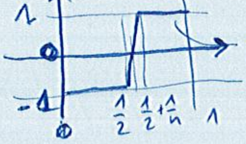
② Espaces de Hilbert

<u>Déf</u> Un <u>espace de Hilbert</u> est un espace préhilbertien <u>complet</u> (pour la norme associée au produit scalaire

<u>exemple</u> : $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel

<u>exemple</u> $\ell^2(\mathbb{R})$ voir plus haut et feuille d'exercices sur la complétude

<u>mais</u> : $C^0([0,1],\mathbb{R})$ avec $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$ <u>n'est pas complet</u> (donc seul^t préhilbertien...)



graphe de f_n

On montre que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$

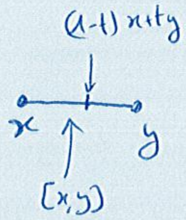
mais qu'elle ne converge pas dans cet espace

exo

Topo VII-2

(3) Le théorème de projection

<u>parties convexes d'un ev</u> : E un ev, $A \subseteq E$ une partie

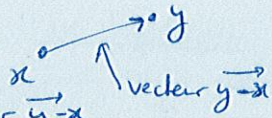


A est <u>convexe</u> si $\forall x,y \in A$, $\underbrace{[x,y]}_{\text{le segment délimité par } x \text{ et } y} \subseteq A$

$[x,y]$ = l'ensemble des $(1-t)x+ty$ pour $t \in [0,1]$

⚠ $(1-t)x+ty = x + t\underbrace{(y-x)}$

on part de x — et on avance selon le vecteur $\vec{y-x}$



<u>exemple</u> les boules (ouvertes, fermées) d'un espace vectoriel normé sont convexes (conséquence de l'inégalité Δ)

<u>Théorème</u> Soit H un espace de Hilbert, et soit C une partie <u>convexe</u> <u>fermée</u> (non vide) de H

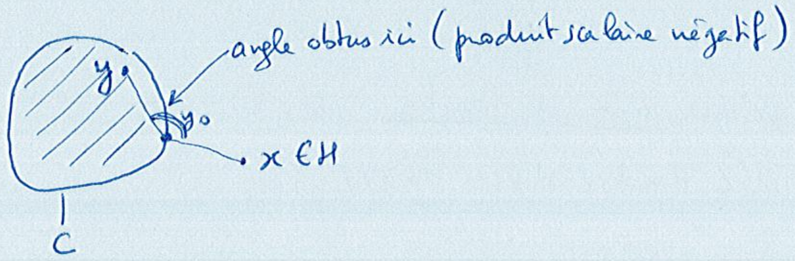
Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y_0 \in C$ pour lequel la distance $\|x-y\|$ est minimale :

$$\exists!\, y_0 \in C \;;\; \forall y \in C,\ \|x-y_0\| \leq \|x-y\|$$

Ce point y_0 est appelé le <u>projeté de x sur C</u>. Il est caractérisé par :

$$\langle x-y_0, y-y_0\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$$

<u>dessin</u> :

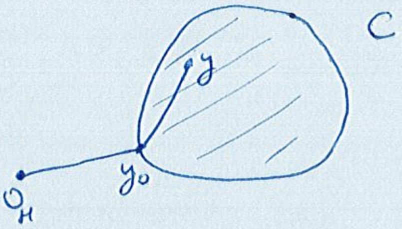


dém

Quitte à translater, on peut supposer que $x = 0_H$ l'origine

Il s'agit donc de montrer qu'il existe un unique vecteur $y_0 \in C$ qui soit de norme minimale

et que $\langle -y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$



Posons $d := \inf\{\|y\| \,;\, y \in C\}$

<u>unicité de y_0 :</u>

si $y, y' \in C$ alors $\frac{y+y'}{2} \in C$ (car C est convexe)

et $\left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y'\|^2$ identité du $\square$ appliquée à $\frac{y}{2}$ et $\frac{y'}{2}$

d'où $\frac{1}{4}\|y-y'\|^2 = \cancel{\left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2}\ \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y'\|^2 - \left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2$

$\Rightarrow \|y-y'\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|y'\|^2 - 4\left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2 \quad (*)$

si $\|y\| = \|y'\| = d$, et forcément $\left\|\frac{y+y'}{2}\right\| \geq d$,

alors $\|y-y'\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$, d'où $y = y'$ $\boxed{\text{unicité}}$

<u>existence</u>

soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de C telle que $\|y_n\| \longrightarrow d$

on reprend $(*)$ avec y_n et y_p :

$0 \leq \|y_n - y_p\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_p\|^2 - 4\left\|\frac{y_n+y_p}{2}\right\|^2$ toujours parce que $\frac{y_n+y_p}{2} \in C$

$\leq \underbrace{2\|y_n\|^2 + 2\|y_p\|^2}_{\downarrow_{n\infty,\, p\infty}\ 4d^2} - 4d^2$

Donc (y_n) est une <u>suite de Cauchy</u> : si $\varepsilon > 0$, on choisit un $N \in \mathbb{N}$

tel que $d \leq \|y_n\| < d + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Alors, pour $n, p \geq N$:

$0 \leq \|y_n - y_p\|^2 \leq \underbrace{2(d+\varepsilon)^2 + 2(d+\varepsilon)^2 - 4d^2}_{\substack{\| \\ \underbrace{4d\varepsilon + 4\varepsilon^2}_{\downarrow_{\varepsilon\to 0}\ 0}}}$

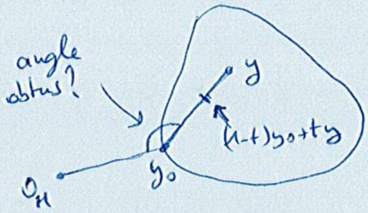
Comme H est complet (espace de Hilbert), cette suite (y_n)

converge : $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_\infty$ dans H

Or $y_n \in C$ $\forall n$, et C est fermé (!), donc $y_\infty \in C$

Par continuité de la norme : $\|y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|y_\infty\|$ et $\|y_n\| \to \underbrace{d}_{\text{par hyp}}$, donc $\|y_\infty\| = d$

$\boxed{\text{existence}}$



<u>caractérisation par le produit scalaire :</u>

* soit y_0 le projeté de O_H sur C

soit $y \in C$

alors $(1-t)\,y_0 + t\,y \in C \quad \forall t \in [0,1]$ convexité de C

et $\|\underbrace{(1-t)\,y_0 + t\,y}_{y_0 + t(y-y_0)}\|^2 \geqslant d^2$ $d = \|y_0\|$

d'où en développant :

$$\underbrace{\|y_0\|^2}_{d^2} + 2\langle y_0, t(y-y_0)\rangle + \|t(y-y_0)\|^2 \geqslant d^2$$

c-à-d $\quad 2t\langle y_0, y-y_0\rangle + t^2\|y-y_0\|^2 \geqslant 0 \quad \forall t \in [0,1]$

d'où $\quad 2\langle y_0, y-y_0\rangle + t\,\|y-y_0\|^2 \geqslant 0 \quad \forall t \in \,]0,1]$ (!)

on fait tendre $t \to 0$:

$$2\langle y_0, y-y_0\rangle \geqslant 0$$

c-à-d $\langle y_0, y-y_0\rangle \geqslant 0$ ou encore $\overbrace{\langle -y_0, y-y_0\rangle \leqslant 0}^{\text{inégalité voulue}}$

* réciproquement, si $y_0 \in C$ vérifie $\langle y_0, y-y_0\rangle \geqslant 0 \;\; \forall y \in C$

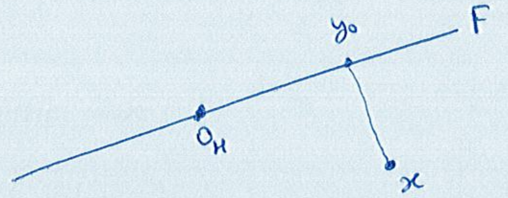
alors, pour tout $y \in C$:

$$\|y\|^2 = \|y-y_0+y_0\|^2$$
$$= \|y-y_0\|^2 + 2\underbrace{\langle y-y_0, y_0\rangle}_{\geqslant 0} + \|y_0\|^2$$
$$\geqslant \|y_0\|^2$$

et donc y_0 est l'unique point de C dont la norme est minimale

Cas particulier : projection sur un sous-espace vectoriel fermé

F un sev fermé de H un sev est convexe (!)



Corollaire Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $H = F \oplus F^\perp$

dém $F \cap F^\perp = \{0_H\}$: si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle \underset{\in F}{x}, \underset{\in F^\perp}{x} \rangle = 0$ et donc $x = 0_H$

$H = F + F^\perp$:

$\boxed{y_0 = \text{le projeté de } x \text{ sur } F}$

tout $x \in H$ s'écrit $x = \underbrace{y_0}_{\in F} + \underbrace{(x - y_0)}_{\text{on affirme que ce vecteur appartient à } F^\perp}$ (!)

en effet : on sait que $\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in F$

mais vu que $y_0 \in F$: l'ensemble des $y - y_0$ pour $y \in F$ est F lui-même

donc $\langle x - y_0, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in F$

donc aussi $\langle x - y_0, -y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in F \qquad (y \in F \Leftrightarrow -y \in F)$

donc $\langle x - y_0, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F$, c'est-à-dire $\boxed{x - y_0 \in F^\perp}$

et donc $x = \underbrace{y_0}_{\in F} + \underbrace{(x - y_0)}_{\in F^\perp}$

[Q.E.D.]

(4) Le théorème de Riesz

Soit H un espace de Hilbert

Pour chaque $x \in H$, on dispose de la forme linéaire $\begin{array}{rcl} H & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$

$\varphi_x =$ "produit scalaire par x"

φ_x est linéaire (puisque le produit scalaire est bilinéaire...)

φ_x est linéaire continue : $\begin{cases} |\varphi_x(y)| = |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| & \text{Cauchy-Schwarz} \\ \forall y \in Y \end{cases}$

et donc $\|\varphi_x\| \leq \|x\|$

mais il y a un cas évident d'égalité :

$|\varphi_x(x)| = |\langle x,x\rangle| = \|x\|^2 = \|x\|\,\|x\|$

donc $\|\varphi_x\| = 1$

On a donc une application $\begin{array}{rcl} H & \xrightarrow{\varphi} & H' \\ x & \longmapsto & \varphi_x \end{array}$ H' dual topologique de H

φ est linéaire (car le produit scalaire est bilinéaire...)

et elle préserve la norme : $\underbrace{\|\varphi_x\|}_{\substack{\text{norme} \\ \text{subordonnée} \\ \text{sur } H'}} = \underbrace{\|x\|}_{\text{norme sur } H}$

Théorème (Riesz) L'application $H \xrightarrow{\varphi} H'$ est une bijection (donc un isomorphisme isométrique).

dém : préserve la norme $\Rightarrow$ injection

surjection ? Soit $\alpha \in H'$ c-à-d $\alpha : H \to \mathbb{R}$ linéaire continue

on veut mq il existe un $x \in H$ tel que $\alpha = \varphi_x$

si $\alpha = 0$ (la forme linéaire nulle), on prend $x = 0_H$

($\varphi_{0_H} = 0_{H'}$ évidemment)

Si $\alpha \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de H, fermé car α est continue.

Donc on peut projeter sur H... et on a $H = \mathrm{Ker}(\alpha) \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(\alpha)^\perp}_{\text{sev non nul car } \mathrm{Ker}(\alpha) \neq H}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\alpha)^\perp$ non nul.

Alors que dire de φ_x ? C'est une forme linéaire continue $H \to \mathbb{R}$,

nulle sur $\mathrm{Ker}(\alpha)$: si $y \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, alors $\varphi_x(y) = \langle x, y\rangle = 0$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(\alpha)^\perp$.

! des formes linéaires non nulles qui ont le m̂ noyau sont proportionnelles

$\alpha \longrightarrow$ noyau $\mathrm{Ker}(\alpha)$

$\varphi_x \longrightarrow$ noyau contient $\mathrm{Ker}(\alpha)$, donc noyau $= \mathrm{Ker}(\alpha)$

(puisque $\varphi_x(x) = \|x\|^2 \neq 0$ [on a pris $x \neq 0_E$ ...])

soit $\lambda = \dfrac{\alpha(x)}{\varphi_x(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\|x\|^2}$

On affirme que $\alpha = \lambda \varphi_x$:

* c'est vrai sur $\mathrm{Ker}(\alpha)$: α et φ_x y sont nulles
* c'est vrai sur x : $\alpha(x) = \lambda \varphi_x(x)$ par déf. de λ
* donc c'est vrai sur H puisque $H = \mathrm{Ker}(\alpha) \oplus \mathrm{Vect}(x)$:

si $y \in H$ alors $y = \underbrace{y_0}_{\in \mathrm{Ker}\,\alpha} + \underbrace{k}_{\in \mathbb{R}} x$.

d'où $\alpha(y) = \alpha(y_0 + kx) = \underbrace{\alpha(y_0)}_{=0} + k\,\alpha(x)$ par linéarité

$(y_0 \in \mathrm{Ker}\,\alpha)$

$$\lambda \varphi_x(y) = \lambda \varphi_x(y_0 + kx) = \lambda\left[\underbrace{\varphi_x(y_0)}_{=0} + k\varphi_x(x)\right]$$

$$= \lambda k \|x\|^2$$

$$= \frac{\alpha(x)}{\|x\|^2} k \|x\|^2 = k\,\alpha(x)$$

Et donc $\alpha = \lambda \varphi_x = \varphi_{\lambda x}$ c'est ce que l'on voulait !

$\blacksquare$