



FEUILLE D'EXERCICES : INTÉGRALES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Calculer en reconnaissant l'intégrale d'une dérivée composée : (a) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$; (b) $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$; (c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$; (d) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$;

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties : (a) $\int_0^1 xe^x dx$; (b) $\int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx$. (c) $\int_1^2 x \ln x dx$; (d) $\int_1^x \ln t dt$, pour $x > 0$; (e) $\int_0^x t \cos t dx$. (f) $\arctan(x) dx$.

Exercice 3. Calculer en effectuant un changement de variables : (a) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$; (b) $\int_0^x \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$; (c) $\int_1^4 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$; (d) $\int_1^x e^{\sqrt{t}} dt$;

Exercice 4. Trouver des nombres réels a, b tels que $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$.

Exercice 5. Soit F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

(1) Montrer que F est C^1 et que $F(x) + F(1/x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$.

(2) En déduire que : $\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + F(x)$.

Exercice 6. (ENSAB 2012) NB : Tous les résultats seront laissés sous forme d'une expression formelle contenant des puissances, des fractions, des factorielles, des logarithmes ou des exponentielles. On prendra $\ln 2 \approx 0,7$ et $1/e \approx 1/3$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = (1 + 1/x) \ln(x)$.

(1) Montrer que f est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée f' .

(2) On considère la fonction h , définie sur \mathbb{R}_+^* par $h(x) = 1+x-\ln(x)$. Faire une étude des variations de h , et en dresser le tableau. En déduire le signe de $h(x)$ pour tout x de \mathbb{R}_+^* .

(3) Déduire de la question précédente le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau des variations de f et calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.

(4) On appelle C la courbe représentative de la fonction f en repère orthonormé d'unité 2cm. Donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1. Tracer C et T .

(5) On note A l'aire de la surface située entre la courbe C et l'axe des x , pour x compris entre 1 et 2. Hachurer cette surface. Calculer A .

Exercice 7. (ENSAB 2017) On considère les fonctions f et g définies sur $[0, \pi/4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}} dt, & \text{si } x \in]0, \pi/4[\\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt \quad \text{si } x \in [0, \pi/4]$$

- (1) Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{2}} g(x)$ pour $x \in]0, \pi/4[$.
- (2) Calculer $g(x)$ pour $x \in [0, \pi/4]$.
- (3) Montrer en utilisant les questions 1 et 2 que f est continue en 0.
- (4) Montrer en utilisant les questions 1 et 2 que f n'est pas dérivable à droite en 0.
- (5) Calculer la dérivée de f sur $]0, \pi/4[$.

Exercice 8. (ENSAB 2018) Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$. On considère les fonctions f , g et h définies sur $]0, 1[$ par

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t}, \quad g(t) = \frac{t}{\ln t}, \quad h(t) = \frac{1}{\ln t}, \quad t \in]0, 1[$$

- (1) Montrer que g et h sont prolongeables par continuité en 0.
- (2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
- (3) Montrer, à l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera, que $\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$ pour $x \in]0, 1[$.
- (4) En utilisant la question précédente, montrer que $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$ pour $x \in]0, 1[$.
- (5) Montrer, en justifiant les inégalités avec soin, que pour $x \in]0, 1[$,

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

- (6) Calculer $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$ pour $x \in]0, 1[$.
- (7) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ et déduire sa valeur des questions précédentes.

Exercice 9. (ENSAB 2010) La plupart des question peuvent être traitées indépendamment.

- (1) On considère l'équation différentielle $xy' - y = x$ définie pour $x \in]0, +\infty[$. Quelle est la solution générale de $xy' - y = x$? Déterminer la solution particulière h de l'équation $xy' - y = x$ telle que $h(e) = e$.
- (2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.
 - (a) Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
 - (b) La fonction f est-elle dérivable en 0?
 - (c) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
 - (d) Dessiner C_f . On représentera les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.
- (3) (a) Déterminer la position relative de C_f et de la droite d'équation $y = x$ selon les valeurs de x .
 - (b) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, hachurer l'ensemble A des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 < x < e \\ f(x) < y < x \end{cases}$$

Calculer l'aire de l'ensemble A .