$\boxed{\text{Exercice 6}}$ $A \cap B \neq \emptyset$ on choisit un point $x \in A \cap B$

Soient $y, z \in A \cup B$.

* si $y, z \in A$, alors $d(y,z) \leq \mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$
* si $y, z \in B$, alors $d(y,z) \leq \mathrm{diam}(B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$
* si p.ex. $y \in A$ et $z \in B$, alors :

$$d(y,z) \leq \underbrace{d(y,x)}_{y,x \in A} + \underbrace{d(x,z)}_{x,z \in B} \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$$

Dans tous les cas : $d(y,z) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$

Donc $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$

$\boxed{\text{Exercice 7}}$

1. (a) Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq A$, car A est ouverte. De plus, il existe une suite (b_n) de points de B telle que $b_n \to x$, car $x \in \overline{B}$. Comme $B(x,r)$ est un voisinage ouvert de x, il existe un rang N tel que $b_n \in B(x,r)$ $\forall n \geq N$.
   Donc $b_n \in A \cap B$ pour tout $n \geq N$
   Donc $x \in \overline{A \cap B}$ (limite d'une suite de points de $A \cap B$)

   (b) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, et donc aussi $A \cap \overline{B} = \emptyset$ d'après l'inclusion de (a)

2. On prend p.ex $X = \mathbb{R}$ usuel $A =]0,1]$ et $B =]1,2]$
   Alors $A \cap B = \emptyset$, donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Mais $A \cap \overline{B} =]0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$

1. (a) $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points du <u>compact</u> X, donc il en existe une sous-suite convergente, disons $(f^{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $(f^{\varphi_1(n)}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points du <u>compact</u> X, donc il en existe une sous-suite convergente, disons $(f^{\varphi_1(\varphi_2(n))})_{n\in\mathbb{N}}$.

Mais $(f^{\varphi_1(\varphi_2(n))}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite extraite de la suite convergente $(f^{\varphi_1(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge encore.

En posant $\varphi := \varphi_1 \circ \varphi_2$, on obtient une extraction telle que les deux suites $(f^{\varphi(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^{\varphi(n)}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

(b) On a :

$$
\begin{aligned}
0 \le d(f^{\psi(n)}(a), a) &= d(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(a), a) \\
&\le d(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)+1}(a), f(a)) \\
&\le \dots \le d(f^{\varphi(n+1)}(a), f^{\varphi(n)}(a))
\end{aligned}
$$

Or $f^{\varphi(n)}(a) \xrightarrow[n\infty]{} \alpha \in X$

donc $d(f^{\varphi(n+1)}(a), f^{\varphi(n)}(a)) \xrightarrow[n\infty]{} d(\alpha, \alpha) = 0$

Donc $d(f^{\psi(n)}(a), a) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

c-à-d $f^{\psi(n)}(a) \xrightarrow[n\infty]{} a$ dans X.

De même : $f^{\psi(n)}(b) \xrightarrow[n\infty]{} b$.

Mais alors :

$$
0 \le d(a,b) \le d(f(a), f(b)) \le \dots \le \underbrace{d(f^{\psi(n)}(a), f^{\psi(n)}(b))}_{\downarrow n\infty \;\; d(a,b)}
$$

Donc toutes ces inégalités sont des <u>égalités</u>.

En particulier, $d(a,b) = d(f(a), f(b))$.

(c) On vient de montrer que f est une <u>isométrie</u> (elle préserve les distances)

(2) C'est une conséquence de la question (2)-(b) :

pour tout $a \in X$, on a trouvé une extraction φ

telle que $\underbrace{f^{\varphi(n)}(a)}_{\in f(X)} \xrightarrow[n\infty]{} a$. Donc $a \in \overline{f(X)}$.

(3) $\begin{cases} f \text{ est } \underline{\text{continue}}, \text{ car elle préserve la distance} \\ X \text{ est compact} \end{cases}$

Donc $f(X)$ est une partie compacte de X.

En particulier, $f(X)$ est $\underline{\text{fermé}}$ dans X

Or on a vu à la question (2) que $\overline{f(X)} = X$

Donc $f(X) = X$

Donc f est surjective

Comme c'est une isométrie, elle est injective

Donc f est bijective.