Année 2017-2018
L3 — Prépa Agro-Véto
HLMA509 Mathématiques

# Feuille d'exercices sur les applications linéaires

**Exercice 1.** Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non.

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$.
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y + 1) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f_4 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - z, x + y + z) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 2.** Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 1)$. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Déterminer $f^2 = f \circ f$, puis $f^3 = f \circ f \circ f$, puis $f^4$, $f^5$, $f^6$.
2. En déduire la forme générale de $f^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4.** On pose $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y - z = 0\}$ et $G := \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$.

1. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(v)$ et $s(v)$, où $p$ désigne la projection de $E$ sur $F$ parallèlement à $G$, et $s$ désigne la symétrie de $E$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

**Exercice 5.** On considère les applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + 3y + z)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z) = (x + 2y, y, x + z)$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = x + y + z$.
4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $k(x, y) = (x, y, x + y)$.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image pour chacune des applications. Vérifier le théorème du rang.
2. Déterminer les applications $f + g$ et $h \circ g$.
3. Montrer que $g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et déterminer $g^{-1}$.

**Exercice 6.** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $u$ est bijectif. Donner la matrice dans la base canonique de sa bijection réciproque.

**Exercice 7.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2$. En déduire que $A$ est inversible, et déterminer $A^{-1}$.

**Exercice 8.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A + I_3)^3$. En déduire que $A$ est inversible, et déterminer $A^{-1}$.

**Exercice 9.** Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.** Déterminer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 11.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 12.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter $f(x,y,z)$.
2. Déterminer si $A$ est inversible.
3. On considère les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (-1,1,0)$ et $w = (1,1,1)$.
    a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
    b) Déterminer $f(u), f(v), f(w)$. En déduire la matrice $B$ de $f$ dans la base $\mathcal{C}$.
    c) Calculer $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
    d) Expliciter les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
    e) Donner une relation matricielle entre $A$, $B$ et $P := P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.
    f) En déduire l'expression de $A^n$, puis de $f^n(x,y,z)$.

**Exercice 13.** Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 14.** Déterminer le noyau, l'image et le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.** Déterminer le rang de la matrice suivante, en fonction de la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$$

## Exercices supplémentaires

**Exercice 16.** Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non. On rappelle que $\mathbb{R}_k[X]$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $k$, et que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $\phi : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. $\psi : g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto g(0) \in \mathbb{R}$.

**Exercice 17.** Dans $\mathbb{R}^3$, on définit $F = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(v) = 2v$ pour tout $v \in F$ et $f(v) = -v$ pour tout $v \in G$. Déterminer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18.** On considère l'application $f$ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = XP' - P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

1. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.
2. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$.
4. Résoudre les équations $XP' - P = X$ et $XP' - P = X^2$.

**Exercice 19.** Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x, y + z, 0)$ est une projection, et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 20.** Soit $E$ un espace vectoriel, et soient $p, q$ deux projecteurs de $E$ tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$ et que $\operatorname{im}(p \circ q) = \operatorname{im}(p) \cap \operatorname{im}(q)$.