Université de Montpellier
—Faculté des Sciences—
Département de Mathématiques

Année universitaire 2017-2018
Prépa Agro-Véto — HLMA509

Feuille d'exercices sur la réduction

Dans les exercices qui suivent, E désigne un espace vectoriel réel.

Exercice 1 (ENSAB 2017)**.** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer les valeurs propres de M.

(2) La matrice M est-elle inversible ?

(3) Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de M.

(4) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 (ENSB 2016)**.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on note f l'endomorphisme défini par $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$, $f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

(1) Donner la matrice A de f dans la base canonique.

(2) On donne :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^tD$ est la transposée de D.

Calculer, lorsque cela est possible, les produits matriciels suivants :

$$BC \ ; \ {}^tDB \ ; \ {}^tCA \ ; \ B^2 \ ; \ DB \ ; \ A^2 \ ; \ {}^tCAC \ ; \ CD$$

Si certains calcules ne sont pas possibles, les identifier et justifier.

(3) B est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

(4) A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Exercice 3 (ENSAB 2015)**.** Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, et qu'un point M du plan a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On considère l'application linéaire f qui à tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ associe le vecteur $f(\vec{u})$ de coordonnées

$$\left(\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y \ ; \ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y\right)$$

Toujours dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit A la matrice de f.

(1) Donner la matrice A.

(2) Calculer son déterminant. A est-elle inversible ?

(3) Cette matrice admet-elle des valeurs propres réelles ?

Soit A_0 un point du plan de coordonnées $(x; y)$, $A_0 \neq (0, 0)$ et $\vec{u_0}$ le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$. Soit $\vec{u_1} = f(\vec{u_0})$ et A_1 le point du plan défini par $\overrightarrow{OA_1} = \vec{u_1}$.

(4) Montrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle.

(5) Donner le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{0A_1})$.

Exercice 4 (ENSAB 2014, extrait)**.** On désigne par $(e_1; e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(1) L'endomorphisme u est-il bijectif ? Dans ce cas donner la matrice de sa bijection réciproque.

(2) Déterminer une base $(v_1; v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice B de l'endomorphisme u soit de la forme suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3) Donner la (ou les) valeurs propres de u ainsi que le (ou les) sous-espaces propres associés. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 5 (ENSAB 2013)**.** (1) **Première partie.** On note (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2) les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(e_1) = e'_1 + 2e'_2, \quad f(e_2) = 2e'_1 + 4e'_2, \quad f(e_3) = e'_1 - 4e'_2$$

(a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

(b) Déterminer une base de $\ker(f)$. En utilisant le théorème du rang que vous énoncerez, déterminez le rang de f puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(2) **Deuxième partie.** Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé pour une matrice carrée.

(b) Calculer le rang de g, en déduire sans calcul une valeur propre simple de g.

(c) Vérifier que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de g.

(d) Soient les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonaliser C et D. (Vous préciserez les valeurs propres et une base de chaque espace propre).

(e) Vérifier que les valeurs propres obtenues sont les valeurs propres de la matrice A associées à des vecteurs propres du type : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (ENSAB 2012)**.** Soit B une matrice $(3,3)$ à valeurs réelles, et I la matrice identité de taille $(3,3)$.

(1) Simplifier les expressions suivantes : $(I - B + B^2)(I + B)$ et $(I + B)(I - B + B^2)$.

(2) Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$. Calculer B^2 et B^3.

(3) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

(4) Donner les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ? Justifier.

Exercice 7 (ENSAB 2011)**.** (1) Soit a un nombre réel, et u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (1, -2, 0), \quad v = (1, a, 0), \quad w = (0, 0, 1)$$

Pour quelle valeurs (*) de a ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

(2) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(1, 0, 0) = u, \quad f(0, 1, 0) = v, \quad f(0, 0, 1) = w$$

(a) Donner la matrice (que l'on notera F) de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Suivant les valeurs de a trouvées à la question précédente donner son rang, définir son espace image $\mathrm{im}(f)$, et donner une base de son noyau $\ker(f)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ (†).

(3) On suppose dans cette question que a vaut -3. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g(u) = (1, 0, 1), \quad g(v) = (1, 1, 2), \quad g(w) = (2, 1, 3)$$

Donner la matrice, que l'on notera G, de g dans la base canonique, ainsi que son rang.

Exercice 8 (ENSAB 2010)**.** On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

où a, b, x, y sont des réels.

(1) Pour quelles valeurs de b l'équation matricicelle $AX = B$ a-t-elle des solutions ? Donner ces solutions.

(2) Donner le rang de la matrice A. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles cette matrice est inversible ?

(3) Pour $a = 0$, donner les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

(∗). Erreur d'accord singulier/pluriel présente dans l'énoncé.

(†). Parfois il faut aussi se battre contre l'énoncé... Si vous trouvez que ce « dans la base canonique » final ne veut rien dire, ajoutez 1 point à votre moyenne semestrielle du module de biologie.

Exercice 9. (extrait de Concours *B* ENSA 2009) Soit a et b deux réels. On donne les matrices G, A, X, X' définies par :

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5+a & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $X'X$, que l'on comparera à G. Pour quelles valeurs de a et b ces deux matrices sont-elles égales ?
(2) Pour quelles valeurs de a la matrice G est-elle inversible ?
(3) Calculer le rang de la matrice X. En déduire celui de la matrice A.
(4) Pour $a = -10$, effectuer une diagonalisation de G. On donnera les valeurs propres de G ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 10 (ENSAB 2008)**.** On donne une matrice A qui dépend du paramètre réel a :

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 2a-3 & a-1 \end{pmatrix}.$$

(1) Que vaut son déterminant ?
(2) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?
(3) Calculer dans ce dernier cas l'inverse A^{-1} de A.
(4) On prend $a = 12$. Quelles sont les valeurs propres de A ? Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
(5) Même question avec $a = 2$.
(6) Pour $a = 1$, la matrice A a-t-elle encore des vecteurs propres (réels) ?

Exercice 11 (ENSAB 2013)**.** Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé pour une matrice carrée.
(2) Calculer le rang de g, en déduire sans calcul une valeur propre simple de g.
(3) Vérifier que le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est vecteur propre de g.
(4) Soient les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonaliser C et D. (Vous préciserez les valeurs propres et une base de chaque espace propre).
(5) Vérifier que les valeurs propres obtenues sont les valeurs propres de la matrice A associées à des vecteurs propres du type : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.