HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2017-2018

Feuille de travaux dirigés n° 3

Sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires

---

1. Echauffement

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausse ? **V** **F**

(1) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles ❑ ❑

(2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad z = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles ❑ ❑

(3) $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ❑ ❑

(4) Le sous-ensemble des matrices échelonnées de dimension (n,p) à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ muni des lois usuelles ❑ ❑

(5) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni des lois usuelles ❑ ❑

(6) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni des lois usuelles ❑ ❑

(7) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq x,y,z sont des irrationnels$\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles ❑ ❑

2. Entrainement

Exercice 2

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants, dire ceux qui sont stables pour l'addition, pour la multiplication externe, et enfin ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$;

$$\mathbb{Z}^2; \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| = |y|\}; \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$$

Exercice 3 $\star\star$

(1) Vérifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = 0 \text{ ou } x - y = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel pour les lois usuelles de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

(3) Reprendre la question 1.

Exercice 4

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\}$.

(1) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner deux arguments pour justifier que $\complement F$ (complémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ que l'on explicitera) n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(3) Justifier que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel.

Exercice 5

(1) Vérifier que l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en 0 est un espace vectoriel.

(2) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{P}_T$ le sous-ensemble de E des fonctions périodique de période T.

   (a) Vérifier que $\mathcal{P}_T$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Montrer que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel.

   (c) Est-ce contradictoire avec l'exercice ** ?

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (4,1,4),\ v_3 = (2,-1,4)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 7

Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}},\ (n^2)_{n\in\mathbb{N}},\ (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 8

Montrer que la famille $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

3. Approfondissement

Exercice 9

(1) Dans $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit une loi $+$ par $(x,y)+(x',y') = (xx', y+y')$ et une loi externe par $\lambda(x,y) = (x^\lambda, \lambda y)$. Vérifier que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $+$ usuelle et de la loi externe définie par $\lambda(x,y) = (\lambda x, 0)$ est-il un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ?

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A un sous-espace vectoriel de E, tel que $A \neq \{0_E\}$ et $A \neq E$. Montrer que $\complement A \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11

Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

(1) Les vecteurs $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1$ sont-ils indépendants ?

(2) Les vecteurs $v_1 + v_2,\ v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ sont-ils indépendants ?

(3) Les vecteurs $v_1, v_1+v_2,\ v_1+v_2+v_3, \ldots, v_1+\ldots v_{n-1}+v_n$ sont-ils indépendants ?

Exercice 12

On considère le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que N ne soit le carré d'aucun entier. Montrer :

(1) $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$

(2) $(1, \sqrt{N})$ est libre

(3) $(1, \sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$ est libre