HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2017-2018

Feuille de travaux dirigés n° 5

Polynômes

1. Echauffement

	V	F
(1) L'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$	❑	❑
(2) Les coordonnées du polynôme $P = X^2 + 2X + 3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont $(1, 2, 3)$.	❑	❑
(3) Le polynôme $(0, 1, 2, 3, 0, 1, 0, 0 \dots)$ est de degré 5	❑	❑
(4) La famille $(X, X(X-1), X(X-1)^2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$	❑	❑
(5) La famille $(X, X(X-1), X(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$	❑	❑
(6) La famille $(2, X-1, (X-1)(X-2), (X-3)(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$	❑	❑
(7) Le polynôme $X^2 - 2$ admet une racine dans $\mathbb{Q}$	❑	❑

Exercice 1

Soient A, P et Q les polynômes suivants :

$$A = X^7 + X^6 + X^5 - 3X^4 + 11X^3 + 11X^2 + 15X - 12$$
$$P = X^3 + X^2 + X - 1$$
$$Q = X^4 - 2X + 13$$

Calculer alors $P + Q$, PQ et $A - PQ$.

Exercice 2

Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2, \quad P(2) = 4.$$

2. Entrainement

Exercice 3

Un polynôme P est dit *inversible* dans $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $PQ = 1$. Montrer que les seuls éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Exercice 4

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

(1) Montrer que si les polynômes $P + Q$ et $P - Q$ sont constants, alors les polynômes P et Q sont constants.

(2) On suppose le polynôme $P^2 - Q^2$ constant et non nul. Montrer que les polynômes P et Q sont constants.

Exercice 5

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, de degré a.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \ldots, X^{a-1}, A, AX, \ldots, AX^n)$ est une base de $\mathbb{K}_{a+n}[X]$.

(2) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, il existe un couple unique (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$P = AQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(A).$$

Exercice 6

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P.

(2) Soit $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$. En remarquant que i est racine de P, factoriser P dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire écrire P comme un produit de polynômes non constants à coefficients réels)

Exercice 7 ***Polynômes interpolateurs de Lagrange***

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. On pose, pour tout entier $i \in [|0, n|]$,

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

(1) Vérifier que pour tout couple (i, j) d'entiers, on a

$$\tilde{L_i}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

(2) Justifier que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$

(3) Monter que pour tout $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout entier $j \in [|0, n|], P(x_j) = y_j$ et que ce polynôme est $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

(4) Application : Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2, \; P(2) = 4.$$

Exercice 8

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et P le polynôme $X^2 - 3X + 2$.

(1) Vérifier que $P(A) = 0$.

(2) Justifier alors que A est inversible, et donner son inverse.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 9

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. On pose, pour tout entier $i \in [|0, n|]$,

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i L_i = X$.

Exercice 10

(1) On considère les sous-espaces vectoriel suivants de $\mathbb{K}_3[X]$:

$$F = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\};$$
$$G = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\};$$
$$H = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(-X) = P(X)\}.$$

Montrer que $\mathbb{K}_3[X] = F \oplus G \oplus H$.

(2) On considère les sous-espaces vectoriel suivants de $\mathbb{K}_3[X]$:

$$F = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(0) = P(1) = P(-1) = 0\};$$
$$G = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(1) = P(2) = P'(2) = 0\};$$
$$H = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(-X) = -P(X)\}.$$

A t-on : $\mathbb{K}_3[X] = F \oplus G \oplus H$?

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On considère le polynôme $P = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.

(1) Vérifier que $P(A) = 0$.

(2) En déduire une condition suffisante sur a, b, c, d pour que A soit une matrice inversible.

(3) Cette condition est-elle nécessaire ?