HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2016-2017

Feuille de travaux dirigés n° 4

Bases et dimension

On rappelle un résultat important du cours : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux parties non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathcal{G})$. Alors $F + G = \operatorname{Vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

1. Echauffement

Exercice 1

	V	F
(1) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ espace-vectoriel de dimension 1.	❑	❑
(2) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel de dimension 1.	❑	❑
(3) La famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (\sqrt{2}, 2)$, $u_2 = (-1, \sqrt{3})$ et $u_3 = (\sqrt{5}, \sqrt{2})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.	❑	❑
(4) La famille (M_1, M_2, M_3) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.	❑	❑
(5) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 1, 1), u_4 = (1, 1, 1)$. Alors $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. *On peut admettre que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.*	❑	❑

Exercice 2

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $F = \operatorname{Vect}((0, 0, 1), (1, 0, 0))$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que $u \in F$.. Comparer F et $G = \operatorname{Vect}((1, 0, 1), (-1, 0, 2))$.

Comparer F et G, c'est établir l'égalité de F et G, ou l'inclusion de l'un dans l'autre s'il y a lieu.

2. Entrainement

Exercice 3

Pour chaque espace vectoriel F et G :
- Donner une base de F et une base de G ;
- Donner la dimension de F et la dimension de G ;
- Déterminer $F \cap G$.

(1) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 0\}$;

(2) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$;

(3) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y = 0\}$

(4) F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites géométriques de raison 2, et G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites géométriques de raison 3.

(5) F est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonale et G est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 4

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$. Justifier que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer ensuite $E + F$, $E \cap F$, un supplémentaire de $E \cap F$ dans E, puis dans F. Ces supplémentaires sont-ils uniques ?

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0\}$, $F = \mathrm{Vect}\,(1, 1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(1, -1, 0)$.

(1) Quelles sont les dimensions de E, F et G ?

(2) Vérifier que F et G sont en somme direct, et que E et F sont en somme directe.

(3) Justifier que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6

(1) Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x + y - z + 2t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}.$$

Expliquer rapidement pourquoi E est un espace vectoriel ? En donner une base et sa dimension.

(2) Inversement, déterminer des équations caractérisant les éléments du sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \mathrm{Vect}\,((-1, 2, 1, -1), (3, 1, 0, -1)).$$

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

(1) Monter que $F = \{f \in E,\ f(a) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Donner un supplémentaire de F dans E.

Exercice 8

On considère les deux sous-espaces $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x - y + z = 0 \text{ et } t = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y - z - 2t = 0 \text{ et } x = 0\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de chacun des sous-espaces F_1, F_2, $F_1 \cap F_2$, $F_1 + F_2$.

Exercice 9

(1) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

  (a) $A = \mathrm{Vect}\,((1, 3, -4), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$

  (b) $B = \mathrm{Vect}\,((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

(2) Déterminer une base des $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriel de $\mathbb{C}^2$:

  (a) $A = \mathrm{Vect}\,((1, i - 2), (2 + i, -5))$

  (b) $B = \mathrm{Vect}\,((i, 2), (3, 4i), (i, 7))$

Exercice 10
On se place dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(1) Démontrer que les vecteurs $f_0 \ : \ x \ \mapsto 1$, $f_1 \ x \ \mapsto \cos(x)$, $f_2 \ : \ x \ \mapsto \cos(2x)$ sont linéairement indépendants dans E.

(2) Vérifier que le vecteur $f \ : \ x \ \mapsto \cos^2(x)$ appartient à $F = \text{Vect}\,(f_0, f_1, f_2)$.

(3) Quel est la dimension de F ?

Exercice 11
Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\}$.

(1) Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que si u est dans $F \cap G$, alors u est constante. Que peut-on en déduire sur $F + G$?

3. Approfondissement

Exercice 12
On considère dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs suivants :
$u = (1, -1, 1, -1) \quad ; \quad v = (1, 1, -1, -1) \quad ; \quad w = (1, -1, -1, 1)$.

(1) La famille (u, v, w) est-elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(2) Soit la famille $F = (u, v, w, t)$ où $t = (-1, -1, -1, 3)$. Est-ce une famille libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 13
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u_1, \ldots, u_n \in E$. Pour tout entier $k \in [|1, n]$, on pose

$$v_k = u_1 + \cdots + u_k.$$

(1) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ l'est.

(2) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre E si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre E.

Exercice 14

(1) Soient u, v, w trois suites réelles définies pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 2^n, \quad v_n = (-3)^n, \quad w_n = n2^n.$$

Montrer que (u, v, w) forme une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) On définit le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $E = \left\{t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ t_{n+3} = t_{n+2} + 8t_{n+1} - 12t_n\right\}$.

  (a) Montrer que E est un espace vectoriel.

  (b) Montrer que les suites a, b, c de E telles que $(a_0, a_1, a_2) = (1, 0, 0)$, $(b_0, b_1, b_2) = (0, 1, 0)$, $(c_0, c_1, c_2) = (0, 0, 1)$ forment une famille génératrice de E.

  (c) Vérifier que les suites u, v, w sont des éléments de E et donner l'expression générale des éléments de E.

Exercice 15
On considère l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales. On note $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines.

(1) Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriel de E ;

(2) Montrer que l'on a $E = F \oplus G$

Exercice 16

Donner un exemple illustrant qu'en général, la réunion de deux familles libres et disjointes X et Y n'est pas libre. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur X et Y pour que $X \cup Y$ soit libre.

Exercice 17

Comparer $\mathrm{Vect}\left(\{\cos(nx),\ n \in \mathbb{N}\}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(\{\cos^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}\right)$.