**HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2017-2018**

---

**Feuille de travaux dirigés n° 2**

Espaces vectoriels, combinaisons linéaires

---

## 1. Echauffement

**Exercice 1**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausse ?

| | V | F |
|---|---|---|
| (1) L'ensemble vide est un espace vectoriel | ❑ | ❑ |
| (2) $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ | ❑ | ❑ |
| (3) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ | ❑ | ❑ |
| (4) $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ | ❑ | ❑ |
| (5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lvert x\rvert = \lvert y\rvert\}$ est stable par addition et multiplication externe | ❑ | ❑ |
| (6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$ est stable par addition et multiplication externe | ❑ | ❑ |
| (7) le vecteur (1,-2,5) n'est pas combinaison linéaire de $(1,-3,2),\ (2,-4,-1),\ (1,-5,7)$. | ❑ | ❑ |
| (8) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est combinaison linéaire de cos et sin. | ❑ | ❑ |
| | ❑ | ❑ |

## 2. Entrainement

**Exercice 2**

Justifier que $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $\oplus$ et $\odot$ définies de la façon suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall v = (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} u \oplus v = (x+x', y+y'); \\ \lambda \odot u = (\lambda^2 x, \lambda^2 y) \end{cases}$$

n'est pas un espace vectoriel.

**Exercice 3**

On appelle support d'une suite $(u_n)$ l'ensemble $J = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0\}$.

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles à support fini est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

(2) De manière analogue, on dit que $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à support borné si $f$ est nulle en dehors d'un segment. $\mathcal{S}$ désigne ici l'ensemble des fonctions à support borné. On a donc :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \big(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \notin [a;b] \Rightarrow f(x) = 0\big)\,.$$

Montrer que $f$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

**Exercice 4**

Vérifier que l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=0 \text{ ou } x-y=0\}$ muni des lois usuelles de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un espace vectoriel.

**Exercice 5**

Soit $E$ un espace vectoriel réel. Montrer que si $E \neq \{0_E\}$, alors $E$ contient une infinité de vecteurs.

**Exercice 6**

Les vecteurs $(1,1),\ (3,-2)$, et $(0,0)$ sont-ils combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,2)$ ? Plus généralement, quels sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui sont combinaison linaire de $u_1$ et $u_2$ ?

**Exercice 7**

Le vecteur $(4,7,-4)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1,2,3),\ (2,3,7),\ (3,5,6)$ ? Si oui, les coefficients de la combinaison linéaire sont-ils uniquement déterminés ?

**Exercice 8**

(1) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, justifier que la fonction polynomiale $x \mapsto 2 - x^2 + 5x^3$ est combinaison linaire des fonctions $x \mapsto 1,\ x \mapsto (x-1),\ x \mapsto (x-1)^2,\ x \mapsto (x-1)^3$.

(2) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $2\cos, -\pi\cos,\ \cos \times \sin$ sont-elles colinéaires à la fonction cos ?

**Exercice 9**

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres réels $a, b, c$ pour que le vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ soit combinaison linaire de $(1,-2,2)$ et $(2,-1,1)$.

**Exercice 10**

Soient $u = (1,2,0,-1)$ et $v = (-3,1,-1,2)$ dans $\mathbb{R}^4$. Pour lequel(s) des vecteurs $w$ la famille $(u,v,w)$ est-elle libre ?

(1) $w = (-2,3,-1,1)$;

(2) $w = (11,1,3,-1)$;

(3) $w = (0,7,-1,-1)$;

(4) $w = (9,-3,3,-6)$.

**Exercice 11**

Soient $(u_n),\ (v_n),\ (w_n)$ trois suites réelles définies pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 2^n, \quad v_n = (-3)^n, \quad w_n = n2^n.$$

Montrer que la famille $((u_n),(v_n),(w_n))$ est une famille libre de $R^{\mathbb{N}}$.

**Exercice 12** ***Démonstration du cours***

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel, et $F$ un sous espace de $E$ *stable* pour les opérations $+$ et $.$. Montrer que $(F,+,.)$ est un espace vectoriel.

**Exercice 13**

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, dire si les ensembles suivants sont *stables* par addition et/ou stables par multiplication externe :

(1) le sous-ensemble $A$ constitué des fonctions croissants (au sens large) ;

(2) le sous-ensemble $B$ constitué des fonctions monotones (au sens large) ;

(3) le sous ensemble $C$ constitué des fonctions deux fois dérivables vérifiant $f'' + 2f' - 3f = 0$ ;

(4) le sous-ensemble $D$ constitué des fonctions $f$ telles que $f(0) = 1$.

**Exercice 14**

Dans l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, déterminer si les sous-ensembles suivants sont stables par addition et/ou multiplication externe :

(1) le sous-ensemble constitué des suites $u$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 0$ ;

(2) le sous-ensemble constitué des suites $u$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $u_n u_{n+2} \geqslant 0$ ;

(3) le sous-ensemble constitué des suites qui admette une limite finie ;

(4) le sous-ensemble constitué des suites qui admet une limite égale à 1.

**Exercice 15**

Proposer un sous-ensemble strict de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stable par addition et par multiplication externe qui contient au moins deux éléments distincts.

**Exercice 16**

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) est stable par multiplication externe et par addition dans $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{R}^n$).