HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2017-2018

Feuille de travaux dirigés n° 6

Applications linéaires

1. Echauffement

V F

(1) L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$ est linéaire ❑ ❑

(2) L'application $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' - P \end{cases}$ est linéaire ❑ ❑

(3) Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. L'application $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto AP \end{cases}$ est linéaire ❑ ❑

(4) L'application $\begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1), P(2)) \end{cases}$ est une application linéaire injective ❑ ❑

(5) Il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ de rang 2 et dont le noyau est de dimension 2. ❑ ❑

(6) Si f est une application linéaire de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $rg(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$ ❑ ❑

2. Entrainement

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (y, x, x+y)$

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z)$

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x-y+z, 3x+y-z, x+y+z, y-2z)$ (on admettra qu'elle est linéaire)

(4) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ définie par $f(x,y) = (x-y, x+iy, (2+i)x+y, 3ix+y)$.

Exercice 2

Soit $\phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'application telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(f) = f' - 2f$.

(1) Vérifier que ϕ est une application linéaire.

(2) Déterminer le noyau de ϕ, $\ker(\phi)$.

(3) Justifier que toutes les fonctions constantes sont dans $\mathrm{Im}(\phi)$.

Exercice 3

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $f = g$ si et seulement si $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

(2) On définit alors l'endomorphisme f par

$$f(e_1) = e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3.$$

Déterminer alors l'image de (x, y, z), pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(3) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $f^{-1}(\{b\})$ pour $b = (3, -1, 1)$ puis $b = (1, 0, 1)$. Que peut-on dire ?

Exercice 4

On note $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$.

(1) Déterminer une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que $E = \ker(f)$.

(2) Déterminer le rang de f.

(3) Enoncer le théorème du rang, et déduire de ce qui précède la dimension de E.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On note $n_1 = \dim(E_1)$ et $n_2 = \dim(E_2)$. On définit l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$ par $f(u_1, u_2) = u_1 + u_2$.

(1) Quelle est la dimension de $E_1 \times E_2$?

(2) Montrer que f est linéaire.

(3) Déterminer le noyau et l'image de f.

(4) Que donne le théorème du rang ?

Exercice 6

Soit f un automorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que f^{-1} est une application linéaire.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ si et seulement si $f \circ f = 0$.

(2) On suppose que n est impair. Montrer que l'on a nécessairement $\mathrm{Im}(f) \neq \ker(f)$.

(3) On suppose que n est pair. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$ si et seulement si $f \circ f = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = \frac{n}{2}$.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$ (où $f^2 = f \circ f$).

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit enfin $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

(2) Montrer que f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de E.

(3) Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'alors $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont *stables* par f, c'est à dire que $f(\mathrm{Ker}(g)) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 11

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. Montrer que l'application $P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

3. Approfondissement

Exercice 12 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Montrer que
$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f).$$
Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f).$$

(2) On suppose à présent E de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(a) $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

(b) $\ker(f^2) = \ker(f)$

(c) $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $fg = h,\ gh = f$ et $hf = g$.

(1) Montrer que f, g, h ont même noyau (K) et même image (I).

(2) Montrer que $f^5 = f$.

(3) En déduire que $E = \mathbb{K} \oplus I$.

Exercice 14

Montrer que l'application $P \mapsto (P(0), P')$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{K}[X]$?