HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2017-2018

Feuille de travaux dirigés n° 7

Matrices, applications linéaires et changement de base

---

1. Entrainement

Exercice 1

Déterminer le rang et la trace des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$ et $u_3 = (1,0,-1)$.

(1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Ecrire la matrice de f relativement à cette base.

(3) En déduire une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit φ l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi : M \mapsto MA - AM.$$

(1) Montrer que φ est une application linéaire.

(2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Surjectif ? Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$.

(4) Déterminer la trace et le rang de φ, φ^2 et de φ^3 ?

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

(1) Trouver une base de $\ker(f)$.

(2) On pose $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_2$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E, puis écrire la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

(3) En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

Exercice 5

On note Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ défini par $\Phi(P) = P(X+1)$.

(1) Ecrire la matrice A de Φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

(2) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 6

On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Écrire la matrice de f relativement à la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, avec $e_1 = (1, -2)$ et $e_2 = (1, -1)$. On la note B.

(2) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (e_1, e_2) et écrire une relation entre A, B et P.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire une relation entre A^n, B^n et P puis en déduire une expression de A^n en fonction de n.

(4) Application : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 1, \quad v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n. \end{cases}$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$.

(1) En utilisant l'exercice 12 de la feuille 6, vérifier que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

(2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, avec des 0 ou des 1 sur la diagonale.

(3) Énoncer et démontrer une réciproque.

2. Approfondissement

Exercice 8

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par u. En déduire une base relativement à laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 9

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3. \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme associé à A.

(1) Déterminer une base de $\ker(f - 3id)^2$ et de $\ker(f + id)$. Vérifier que $\ker(f - 3id)^2$ et de $\ker(f + id)$ sont supplémentaires.

(2) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, avec n un entier naturel au moins égal à 4. Soient a un élément de $\mathbb{K}$, et f l'application de E dans E définie par

$$f : P \mapsto (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme.

(2) Justifier que la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de E.

(3) Déterminer le noyau et l'image de f