HLMA201 - Algèbre linéaire 2 - 2017-2018

Feuille de travaux dirigés n° 1

Systèmes linéaires, rappels

Exercice 1

Les expressions suivantes ont-elles un sens ? Si oui, les réduire.

$$2+4\,(2,0,-7),\qquad 4.\left(3,\frac{7}{2},6\right)-\sqrt{2}\,.\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\qquad \left(1,\frac{2}{3},9,0\right)+\left(5,-57,\frac{15}{66}\right).$$

Exercice 2

Ecrire la matrice des coefficients et la matrice augmentée des systèmes linéaires en (x,y,z,t) suivants :

$$(1)\ \left\{2x+\sqrt{7}y-t = 1\right.$$

$$(2)\ \begin{cases} x = 2\\ y = 5\\ t = 0\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} 5t+6x-z = 56\\ 2x+5z-3t-\dfrac{y}{2} = 15\\ 3z-7y+2 = 0\end{cases}$$

$$(4)\ \left\{0 = 2\right.$$

Exercice 3

Ecrire les systèmes linéaires (en choisissant un nom aux variables) dont les matrices augmentées sont :

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 & 0\\ 4 & 5\end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0\\ 4/3 & 1/3 & -1/3\end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 22 & 6,5 & 0 & 0 & 12 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Exercice 4

On considère la matrice :

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Effectuer respectivement les opérations élémentaires suivantes sur la matrice M :

(1) échanger les première et troisième lignes, puis ajouter la première ligne à la deuxième ligne ;

(2) ajouter la première ligne à la deuxième ligne, puis échanger les première et troisième lignes.

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 5

Mettre sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Pour chacun des systèmes en (x, y, z) suivants : écrire la matrice augmentée, trouver la matrice échelonnée réduite équivalente et résoudre le système.

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 10 \\ x - y = -2 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x + y - 5z = 3 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x - 3y - 5z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 7

Comparer les ensembles de solutions des systèmes linéaires en (x, y, z) suivants :

(1) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 6 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 6y + 2z = 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x + z = 2 \\ -x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 4x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Exercice 8

(1) Un système linéaire dont le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre de variable est parfois appelé *système sous-déterminé*. Un tel système peut-il être incompatible ? S'il est compatible, peut-il avoir une seule solution ?

(2) Un système linéaire dont le nombre d'équations est strictement supérieur au nombre de variable est parfois appelé *système sur-déterminé*. Un tel système peut-il être compatible ? Si oui, peut-il avoir une infinité de solutions ?

Exercice 9

Déterminer g, h et k afin que les systèmes suivants soient compatibles.

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right)$

(2) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -2 \\ 3 & h & -6 \end{array}\right)$

(3) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & h \end{array}\right)$

(4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right)$

(5) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & g \\ 4 & 7 & -4 & h \\ -6 & -3 & 1 & k \end{array}\right)$

Exercice 10

On dit qu'une suite numérique (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

(1) Vérifier que la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ vérifie $\mathcal{P}$

(2) Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui vérifient $\mathcal{P}$, alors $(u_n + v_n)$ vérifie $\mathcal{P}$

(3) Montrer que si (u_n) vérifie $\mathcal{P}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, (λu_n) vérifie $\mathcal{P}$.

Exercice 11

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E) $x^2y'' + xy' - y = 0$ lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

(1) Vérifier que la fonction $x \mapsto x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est solution de (E).

(2) Montrer que si f et g sont deux solutions de (E), alors pour tout réel λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est solution de (E).

Exercice 12

On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.

(1) Quel est la dimension de la matrice associée à f ?

(2) Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$. Est-ce possible que ce soit l'ensemble vide ? Montrer que si X et Y sont dans $\mathrm{Ker}(f)$, alors pour tout réel λ et μ, $\lambda X + \mu Y$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$.

(3) Rappeler la définition de $\mathrm{Im}(f)$. Est-ce possible que ce soit l'ensemble vide ? Montrer que si X et Y sont dans $\mathrm{Im}(f)$, alors pour tout réel λ et μ, $\lambda X + \mu Y$ est dans $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13

On considère $f : \ \mathbb{R}^3 \to \ \mathbb{R}^3$ une application linéaire, telle que :

$$f(1,0,0) = (1,0,2);\ f(0,1,0) = (3,2,4);\ f(0,0,1) = (4,6,2)$$

(1) Calculer $f(1,1,1)$, puis $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer le noyau de f.

(3) Justifier que $v = (1,1,1)$ est dans l'image de f, et determiner l'ensemble $\mathrm{Im}(f)$.

(4) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?