Année 2018-2019
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Déterminer, dans $\mathbb{R}$ usuel, l'intérieur et l'adhérence de $[0,1]$, $]0,1[$, $[0,1[$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\emptyset$, $\mathbb{R}$.

Exercice 2. ⚠ Dans cet exercice, pour une raison typographique, on note $\operatorname{int}(A)$ l'intérieur d'une partie A. Soit X un espace métrique. Soient A et B des parties de X.

1. Montrer que $X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)$ et que $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Montrer que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).
3. Montrer que $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. Montrer que $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que la fonction distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue, lorsqu'on met la topologie produit sur $X \times X$.

Exercice 4. soit (X,d) un espace métrique. Si A est une partie de X et $x \in A$, on définit la **distance** de x à A par :

$$d(x,A) := \inf_{a \in A} d(x,a)$$

1. Montrer que $d(x,A)$ est bien définie. Que vaut $d(x,A)$ lorsque $x \in A$?
2. Déterminer $d(x,A)$ dans les cas suivants : (i) $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $x = 0$. (ii) $X = \mathbb{R}^2$ euclidien, $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s+1\}$ et $x = (0,0)$. (iii) $X = \mathbb{R}^2$ avec d_∞, $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s+1\}$ et $x = (0,0)$. (iv) X ensemble avec sa métrique discrète, A partie non vide quelconque et $x \notin A$. (v) $X = \mathbb{R}$ usuel, $A = \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
3. Montrer que, quels que soient $x, y \in X$:
$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \quad \text{et} \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$
En déduire que la fonction « distance à A » est continue sur X.
4. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x,A) = 0$.

5. L'exercice se poursuit dans les « exercices supplémentaires »...

Exercice 5. On se place dans l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n, identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$ avec la distance d_∞. Déterminer si les parties suivantes sont ouvertes, fermées : (i) l'ensemble des matrices inversibles ; (ii) l'ensemble des matrices de déterminant 1 ; (iii) l'ensemble des matrices symétriques ; (iv) l'ensemble des matrices orthogonales ; (v) l'ensemble des matrices de rang 1.

Exercice 6. Soient X et Y deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que si f est continue, alors son graphe $G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ est fermé dans $X \times Y$. Montrer que la réciproque est fausse, par exemple avec une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non continue de graphe fermé.

Exercice 7. On note ℓ^∞ l'ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels, et pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^∞, on pose $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang n'est pas fermé dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 8. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|$ converge. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^1, on pose $\|x\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur ℓ^1.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 9. **(lemme d'Urysohn dans les espaces métriques)** Soit X un espace métrique, et soient A et B deux fermés *disjoints* de X. Le lemme d'Urysohn affirme qu'il exise une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $A = f^{-1}(0)$ et $B = f^{-1}(1)$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ donnée par la formule suivante répond à la question :

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

Exercice 10. On souhaite montrer que l'ensemble des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{R})$. Pour cela, soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible.

1. Montrer que, si λ est un nombre réel non nul suffisamment proche de 0, alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible.
2. En déduire qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A.
3. Conclure.

Exercices supplémentaires

Exercice 11. Soient X et Y deux espaces métriques. On se donne deux fermés F et G de X, et deux applications continues $f : F \to Y$ et $g : G \to Y$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in F \cap G$. Montrer qu'alors on définit une application continue $h : X \to Y$ en posant :

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F\,; \\ g(x) & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Exercice 12. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la distance d_∞. Montrer que si U est un ouvert de X et V est un ouvert de Y, alors $U \times V$ est un ouvert de $X \times Y$. Est-ce que tout ouvert de $X \times Y$ est de cette forme ? Faire des dessins dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par exemple.

Exercice 13.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est contenue dans la boule fermée de même centre et même rayon. Donner un exemple (avec un rayon non nul !) où l'inclusion est stricte.
2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, muni de la distance associée. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte (de rayon non nul) est égale à la boule fermée de même centre et même rayon.

Exercice 14. On se place dans $X :=]0, 1] \cup \{2\}$ vu comme sous-espace métrique de $\mathbb{R}$ usuel. *Dans cet espace* X, les ensembles $]0, 1]$, $\{2\}$, $]0, 1/2[$, $]0, 1/2]$ sont-ils ouverts, fermés ? Déterminer leur intérieur et leur adhérence.

Exercice 15. Soit (X, d) un espace métrique discret.

1. Soit (X', d') un autre espace métrique. Quelles sont les applications $f : X \to X'$ qui sont continues ?
2. A quelle condition une fonction $f : \mathbb{R} \to X$ est-elle continue, l'espace $\mathbb{R}$ étant muni de sa métrique usuelle ?

Exercice 16. Soit X un espace métrique. La **frontière** d'une partie $A \subseteq X$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que tout voisinage de x contient à la fois un point de A et un point qui n'est pas dans A.

1. Déterminer la frontière dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes : $[0, 1]$, $]0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, par définition, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$. En déduire que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$ et que $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$, et donner un exemple où ces deux inclusions sont strictes.

4. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$, et donner un exemple d'inclusion stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 17. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$

1. Montrer que $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$ pour tout $x \in X$.
2. Pour $r > 0$, on pose $V_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$. Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert contenant A.
3. Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} V_r(A)$. En déduire que tout fermé de X est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts, et que tout ouvert de X est l'union d'une suite croissante de fermés.

Exercice 18. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.

1. Expliquer pourquoi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide. On pose $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Si $a > 0$, montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Montrer que l'ensemble $\{m + \sqrt{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Montrer que, dans l'espace ℓ^∞ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

1. L'ensemble $\mathbf{c}$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^∞.
2. $\mathbf{c}$ est l'adhérence de l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 20. On se place dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la distance p-adique pour un certain nombre premier p (voir feuille TD1). Montrer que l'adhérence de $\mathbb{Z}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.