Année 2018-2019
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Les fonctions suivantes définissent-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

1. $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$
2. $d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$
3. $d_3(x, y) = \exp(x - y)$

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, muni de la distance associée. Montrer que les boules (ouvertes, fermées) de E sont convexes [1].

Exercice 3. Soit X la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $X := ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$, munie de la distance induite par la distance d_∞ sur $\mathbb{R}^2$ (distance de sous-espace). Sur un dessin, représenter les boules de X de centre $(1, 0)$ en discutant suivant la valeur du rayon.

Exercice 4. Soit $X = \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la distance d_∞.

1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans (X, d_∞), alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour chaque réel $x \in [0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$. Montrer que la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite dans (X, d_∞).
3. Montrer que la même suite converge vers la fonction nulle dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_1.

Exercice 5. Déterminer si les parties suivantes sont ouvertes, fermées, dans $\mathbb{R}$ usuel : (i) $\mathbb{Z}$; (ii) $\mathbb{Q}$; (iii) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; (iv) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

Exercice 6. Déterminer si les parties suivantes sont ouvertes, fermées, dans $\mathbb{R}^2$ euclidien : (i) $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$; (ii) $\{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0\}$; (iii) $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$;

Exercice 7. On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ avec les distances d_1 et d_∞.

1. Une partie A d'un espace vectoriel est **convexe** si, quels que soient $x, y \in A$ et $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)x + ty \in A$.

1. Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que la boule $B_{d_1}(0_E, 1)$ est ouverte dans (E, d_∞).
2. Construire une suite de fonctions $f_n \in E$ telle que $\|f_n\|_1 \to 0$ quand n tend vers l'infini, tout en vérifiant $\|f\|_\infty = 1$. En déduire que la boule $B_{d_\infty}(0_E, 1)$ n'est pas ouverte dans (E, d_1).
3. Que peut-on en déduire sur les distances d_1 et d_∞ ?

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique. On pose $\delta(x, y) := \min(1, d(x, y))$ pour $x, y \in X$.

1. Montrer que δ est une distance sur X.
2. Montrer que d et δ définissent les mêmes ouverts.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. On se place dans $X :=]0, 1] \cup \{2\}$ vu comme sous-espace métrique de $\mathbb{R}$ usuel. *Dans cet espace* X, les ensembles $]0, 1]$, $\{2\}$, $]0, 1/2[$, $]0, 1/2]$ sont-ils ouverts, fermés ?

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq X$

1. Montrer que $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$ pour tout $x \in X$.
2. Pour $r > 0$, on pose $V_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$. Montrer que $V_r(A)$ est un ouvert contenant A.
3. Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} V_r(A)$. En déduire que tout fermé de X est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts, et que tout ouvert de X est l'union d'une suite croissante de fermés.

Exercice 11. Soit X un espace métrique (plus généralement topologique). La **frontière** d'une partie $A \subseteq X$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que tout voisinage[2] de x contient à la fois un point de A et un point qui n'est pas dans A.

1. Déterminer la frontière dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes : $[0, 1]$, $]0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, par définition, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$. En déduire que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$ et que $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$, et donner un exemple où ces deux inclusions sont strictes.
4. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$, et donner un exemple d'inclusion stricte (dans $\mathbb{R}$, par exemple).

Exercice 12. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$.

2. On rappelle qu'un voisinage de x est un ouvert qui contient x. Dans un espace métrique, on peut remplacer « tout voisinage de x » par « toute boule centrée en x ».

1. Expliquer pourquoi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide. On pose $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$. Si $a > 0$, montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{m + \sqrt{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. On dit qu'une distance d sur un ensemble X est **ultramétrique** si elle vérifie l'« inégalité ultramétrique » :

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

1. Montrer que l'inégalité (13) implique l'inégalité triangulaire ordinaire.
2. Dans un espace ultramétrique, montrer que :
   a) si $d(x, y) \neq d(y, z)$, alors il y a égalité dans (13), autrement dit « tous les triangles de X sont isocèles ».
   b) tout point d'une boule ouverte (ou fermée) est centre de cette boule.
   c) les boules (ouvertes, fermées) sont à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 14. On considère l'ensemble X des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. Pour x et y appartenant à X, on pose :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ \dfrac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1. Soient x, y, z trois suites différentes. Montrer que
$$\min\{n \mid z_n \neq x_n\} \geq \min\left\{\min\{n \mid x_n \neq y_n\}, \min\{n \mid y_n \neq z_n\}\right\}.$$
2. En déduire que $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. En déduire que d est une distance ultramétrique sur X.

Exercice 15. Soit p un nombre premier fixé. On sait que tout rationnel non nul $x \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit de manière unique[3] sous la forme

$$x = p^k \frac{m}{n},$$

où $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ et $m \wedge n = 1$. Avec ces notations, on pose[4] $v_p(x) := k$.. Par exemple, pour $p = 2$, on a $v_p(2) = 1$ et $v_p(1/2) = -1$. Combien vaut $v_p(3/5)$?

La **distance p-adique** entre deux nombres rationnels $x, y \in \mathbb{Q}$ est définie par :

$$d_p(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ \dfrac{1}{p^{v_p(x-y)}} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

3. Pour le voir : écrire x sous forme d'une fraction irréductibe avec dénominateur positif, et sortir les puissances de p s'il y en a au numérateur (dans ce cas k sera positif) ou au dénominateur (dans ce cas k sera négatif). S'il n'y a pas de puissances de k ni au numérateur ni au dénominateur, alors k sera nul.

4. Ce nombre $v_p(x)$ est la **valuation p-adique** du rationnel x.

1. Montrer que $d_3(2, 252) = 1$ et que $d_5(2, 252) = 1/5^3$.
2. Montrer que $v_p(a - b) = \min(v_p(a), v_p(b))$ si a et b sont des nombres rationnels non nuls et distincts. En déduire que d est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} p^n = 0$ dans $(\mathbb{Q}, d_p)$.
4. Montrer que la suite $x_1 = 3$, $x_2 = 33$, $x_3 = 333$ etc. converge vers $-1/3$ dans $(\mathbb{Q}, d_5)$.