Prépa concours agro-véto
Algèbre linéaire
HLMA413 - HLMA509

David Théret
Université de Montpellier
Faculté des Sciences

5 septembre 2019

Table des matières

Pictogrammes

⚠ pour un point important

© pour une observation sur les sujets de concours

⬇ pour signaler une notion qui sera vue plus loin

✏ pour une démonstration ou un exemple à compléter :

- Vous *devez* savoir faire tous les exemples notés ✏. C'est la priorité !
- Les démonstrations notées ✏, avec parfois une indication, sont instructives et relativement simples. Elles vous permettront de mieux comprendre les concepts du cours. Très souvent, vous pourrez en comprendre l'essentiel en voyant comment elles fonctionnent sur un exemple. Vous pouvez les aborder en toute généralité si vous avez bien compris les exemples et que vous voulez aller plus loin.
- Les démonstrations notées ✏✏ et ✏✏✏ sont plus difficiles ou plus longues.

Contact

Pour signaler une erreur, faire des remarques ou suggestions, merci de me contacter à l'adresse : `david.theret@umontpellier.fr`

1 Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, n et p désignent des nombres entiers et jouent les rôles suivants :

- n sera le nombre d'inconnues dans les équations (on le suppose ≥ 2) ;
- p sera le nombre d'équations (on le suppose ≥ 1).

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres réels. Par exemple, $(2, -3) \in \mathbb{R}^2$ et $(0, -\sqrt{2}, \pi, 1) \in \mathbb{R}^4$.

1.1 Équations et systèmes linéaires

Définition 1. Une **équation linéaire** en les variables $x_1, \ldots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b, \tag{1.1}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Exemple. $x + 3y - 2z = 1$ est une équation linéaire en x, y, z.

Définition 2. Un **système d'équations linéaires**, ou **système linéaire**, de p équations en les variables $x_1, \ldots, x_n$, est une liste de p équations linéaires en $x_1, \ldots, x_n$. On écrit un tel système en « réunissant » les équations par une accolade :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{1.2}$$

Une équation linéaire est donc un cas particulier de système linéaire. Dans l'écriture (1.2), les nombres $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système, et les nombres b_i forment le **second membre**. Les coefficients a_{ij} sont repérés par *deux indices* : le premier indice i est l'indice d'équation (indice de ligne), le deuxième indice j est l'indice de variable (indice de colonne, lorsque l'on aligne verticalement les variables de même indice dans l'écriture du système).

Exemple. Voici deux systèmes en x, y, z. Celui de gauche est linéaire, celui de droite ne l'est pas :

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} 2x + 5y - z = -1 \\ 3xy + 4y + 2z = 2 \end{cases}$$

1.2 Solutions d'un système linéaire

Définition 3. Une **solution** d'un système linéaire est un n-uplet $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ qui est *simultanément* solution de *chacune* des équations linéaires qui composent le système. On dit qu'un système est **compatible** s'il possède au moins une solution, et **incompatible** s'il ne possède aucune solution.

Exemple. Le triplet $(2, -1, 0)$ est une solution du système

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$$

Ce système est donc compatible. Le triplet $(-3, 1, 0)$ n'est pas solution car il ne vérifie pas la seconde équation (bien qu'il vérifie la première).

Exemple. Le système suivant n'est pas compatible :

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

En effet, tout triplet (x, y, z) qui vérifie les deux premières équations devrait aussi vérifier $4x - y + 2z = 1$ en faisant la somme des deux équations, donc ce triplet ne vérifie pas la troisième équation.

Résoudre un système linéaire, c'est donner de manière explicite l'ensemble des solutions du système. Le théorème suivant est fondamental : il montre qu'il n'y a que trois possibilités pour cet ensemble des solutions.

Théorème 4. Soit un système linéaire ne possède aucune solution, soit il possède une unique solution, soit il possède une infinité de solutions.

Il est facile de décrire de manière explicite un ensemble qui ne contient pas d'éléments ou qui contient un seul élément, comme dans les deux premiers cas du théorème ci-dessus. Mais que veut dire « décrire explicitement » lorsque l'ensemble est infini ? Nous allons voir que la méthode du pivot de Gauss permet d'obtenir une *description paramétrique* de cet ensemble infini, ce qui nous donnera un procédé simple de construction de toutes les solutions.

1.3 Systèmes linéaires homogènes

Il s'agit d'un cas particulier important de systèmes linéaires.

Définition 5. Un système linéaire est **homogène** lorsque tous ses seconds membres sont nuls, c'est-à-dire lorsque $b_1 = \cdots = b_n = 0$ avec les notations de (1.2). Le **système homogène associé** à un système non-homogène est le système obtenu en remplaçant tous les seconds membres par 0.

Exemple. Voici deux systèmes linéaires en x, y, z. Le système de gauche est homogène, et c'est le système homogène associé au système de droite

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y - z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

⚠ Un système linéaire homogène possède toujours au moins la « solution nulle » $x_1 = \cdots = x_n = 0$. De plus, si $(x_1, \ldots, x_n)$ en est solution alors $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ en est aussi solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin, nous verrons plus loin qu'il y a une relation forte entre les solutions d'un système linéaire non-homogène et celles de son système homogène associé.

1.4 Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un algorithme qui permet de transformer, au moyen d'*opérations élémentaires*, un système linéaire quelconque en un *système échelonné* simple à résoudre, et cela sans modifier l'ensemble des solutions.

1.4.1 Systèmes linéaires échelonnés

Les systèmes échelonnés sont les systèmes « simples à résoudre » auxquels la méthode du pivot permet de se ramener. On commence par les définir, puis on explique comment les résoudre.

On commence par observer qu'une équation linéaire peut être de trois formes différentes :

Définition 6. Soit $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ une équation linéaire.

- Si au moins un des nombres $a_1, \ldots, a_n$ n'est pas nul, on dit que l'équation est **régulière**.
- Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$ et $b = 0$, on dit que l'équation est **du type** $0 = 0$.
- Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$ et $b \neq 0$, on dit que l'équation est **du type** $0 = 1$.

Remarque. ⚠ En pratique, on ne travaille pas longtemps avec des équations de type $0 = 0$ ou $0 = 1$. En effet, si un système possède une équation du type $0 = 1$, alors il n'admet pas de solutions (système incompatible), et s'il possède une équation du type $0 = 0$ alors on peut enlever cette équation du système sans changer l'ensemble des solutions. Cela étant dit, dans le cas d'un système dans lequel les seconds membres sont des paramètres, on est souvent amené à rencontrer des équations qui peuvent être de type $0 = 0$ ou $0 = 1$ en fonction des valeurs des paramètres. Voir la fin du chapitre.

Dans un système linéaire, on s'intéresse au nombre de coefficients nuls [1] qui se trouvent en tête (au début) des équations régulières. Par exemple, dans le système suivant :

$$\begin{cases} \phantom{x+y+{}} z + t = 2 \\ x + y + z \phantom{{}+t} = 1 \\ \phantom{x+{}} y \phantom{{}+z} + t = 5 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \begin{cases} 0x + 0y + z + t = 2 \\ x + y + z + 0t = 1 \\ 0x + y + 0z + t = 5 \end{cases} \tag{1.4}$$

toutes les équations sont régulières, la première commence par deux coefficients nuls (ceux de x et y), la deuxième équation ne commence pas par un coefficient nul, et la troisième équation commence par un seul coefficient nul (celui de x).

Dans une équation régulière, la « variable qui apparaît au début de l'équation » est la première variable qui est affectée d'un coefficient non nul. Par exemple, c'est la variable z dans l'équation $0x + 0y + z + t = 2$.

Définition 7. Un système linéaire est **échelonné** s'il satisfait les trois conditions suivantes :

- Il commence par un groupe d'équations régulières, suivies éventuellement par un groupe d'équations du type $0 = 1$, suivies éventuellement par un groupe d'équations $0 = 0$.
- Dans le groupe d'équations régulières, le nombre de coefficients nuls au début des équations augmente strictement quand on passe d'une équation à la suivante.

Les **variables principales** d'un système échelonné sont les variables qui apparaissent au début d'une (et une seule) des équations. Les autres variables sont appelées **variables libres** du système. [a]

a. ⚠ Les notions de variable libres/principales n'ont de sens que pour les systèmes échelonnés.

Exemple. Le système suivant est échelonné :

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} - z \phantom{{}+t} - u + v = 0 \\ \phantom{x+{}} y + 3z \phantom{{}+t} + 5u - 3v = 1 \\ \phantom{x+y+3z+{}} t + 2u - v = 2 \end{cases} \tag{1.5}$$

En effet, toutes ses équations sont régulières, et le nombre de coefficients nuls de chaque équation est successivement 0, 1, 3, ce qui est bien strictement croissant. Les variables principales sont x, y, t. Les variables libres sont z, u, v.

(1). On rappelle que les « coefficients » sont les nombres qui viennent multiplier les variables dans le système.

Un système échelonné dont toutes les équations sont régulières comporte au moins autant de variables que d'équations, puisque chaque équation commence par une variable différente. Comme on le voit dans le résultat fondamental suivant, deux cas peuvent alors se produire, selon qu'il y en a le même nombre ou non.

Proposition 8. Considérons un système échelonné dont toutes les équations sont régulières. Alors :

- S'il y a autant de variables que d'équations, le système possède une unique solution.
- S'il y a strictement plus de variables que d'équations, le système possède une infinité de solutions, qui sont paramétrées par les variables libres du système.

Exemple. Le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ - y - z = 4 \\ - 2z = 2 \end{cases}$$

est échelonné et possède autant de variables que d'équations. Il possède une unique solution que l'on détermine en partant du bas : on trouve d'abord $z = -1$, puis $y = 3$ en reportant la valeur de z dans la deuxième équation, puis $x = 4$ en reportant les valeurs de y et z dans la première équation. Donc $(4, 3, -1)$ est l'unique solution. L'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{ (4, 3, -1) \}.$$

Exemple. Le système

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ 2t - 6u = -6 \end{cases}$$

est échelonné et comporte strictement plus de variable que d'équations. Si on fait passer les variables libres z et u du côté des seconds membres, on obtient un système triangulaire en les variables principales x, y, t, dans lequel les variables libres jouent le rôle de paramètres :

$$\begin{cases} 2x - 5y - 4t = 4 - 3z - 2u \\ y + 2t = 6 + 5z - 2u \\ 2t = -6 + 6u \end{cases}$$

Pour chaque choix des variables libres z et u, on obtient alors un système qui possède une unique solution ; en résolvant de bas en haut, on trouve successivement :

$$t = -3 + 3u, \quad y = 12 + 5z - 8u, \quad x = 26 + 11z - 15u. \tag{1.6}$$

On voit ainsi que les solutions sont paramétrées par les variables libres z et u, qui sont autorisées à varier librement dans $\mathbb{R}$ (d'où leur nom) : à chaque affectation de valeurs à z

et u correspond une solution du système en prenant les valeurs de x, y, t déterminées par (1.6). [2] On obtient ainsi une **description paramétrique** de l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \{ \ (26 + 11z - 15u, 12 + 5z - 8u, z, -3 + 3u, u) \mid z, u \in \mathbb{R} \ \},$$

ce qui se lit de la manière suivante :

> « l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des quintuplets de la forme $(26+11z-15u, 12+5z-8u, z, -3+3u, u)$, où z et u prennent n'importe quelle valeur réelle. »

1.4.2 Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires permettent de transformer un système linéaire sans modifier ses solutions. Pour les décrire, on numérote $E_1, E_2, E_3 \dots$ les équations des systèmes.

Définition 9. Les **opérations élémentaires** sur les équations d'un système linéaire sont :

(1) L'**interversion** de deux équations E_i et E_j, notée $E_i \leftrightarrow E_j$.

(2) La **multiplication** d'une équation E_i par un nombre réel λ *différent de 0*, notée $E_i \leftarrow \lambda E_i$.

(3) L'**addition** à une équation E_i d'un multiple d'une *autre* équation E_j, notée $E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j$.

Remarques. 1. ⚠ Bien noter que l'on suppose $\lambda \neq 0$ dans l'opération (2). Si on remplaçait E_i par $0E_i$, on éliminerait tout simplement l'équation E_i et on perdrait probablement une condition sur les solutions du système.

2. De même, on suppose $i \neq j$ dans l'opération (3), car remplacer E_i par $E_i + \lambda E_i$ revient à multiplier E_i par $1 + \lambda$, ce qui est déjà permis par l'opération (2) si $\lambda \neq -1$ et qui est interdit si $\lambda = -1$.

3. ⚠ On peut effectuer plusieurs opérations élémentaires simultanément à condition que cela revienne à les faire successivement. Par exemple, l'opération $E_i \leftarrow \lambda E_i + \mu E_j$ (avec λ réel non nul et j indice différent de i) s'obtient en faisant successivement $E_i \leftarrow \lambda E_i$ puis $E_i \leftarrow E_i + \mu E_j$.

4. On écrit

$$\Sigma \xrightarrow[OE]{} \Sigma'$$

pour signifier que l'on passe du système Σ au système Σ' par l'opération élémentaire OE.

(2). Par exemple, au choix $z = u = 0$ correspond la solution $(26, 12, 0, -3, 0)$; au choix $z = 0, u = 1$ correspond la solution $(11, 5, 0, 0, 1)$, etc.

Proposition 10. Les opérations élémentaires préservent les ensembles de solutions : si on peut passer d'un système Σ à un système Σ' par une opération élémentaire, ou par une succession d'opérations élémentaires, alors Σ et Σ' ont les mêmes solutions.

Démonstration. ✎✎ □

Exemple. Voici un passage d'un système à un autre :

$$\begin{cases} 2x + \ 3y - \ z = \ 0 \\ 4x + \ 5y - 3z = \ 4 \\ 6x + 10y - 4z = -2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1}]{} \begin{cases} 2x + \ 3y - z = \ 0 \\ \quad -y - z = \ 4 \\ \quad \ y - z = -2 \end{cases}$$

On y a effectué deux opérations élémentaires simultanément, ce qui est autorisé car cela revient à effectuer $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$ puis $E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1$.

Exemple. ⚠ Voici un **mauvais exemple** de passage d'un système à un autre :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow E_2 - E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_1 \\ E_1 \leftarrow E_1 - E_3}]{} \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Clairement, le système de droite n'a pas les mêmes solutions que celui de gauche, or on exige que les opérations préservent les solutions. Que s'est-il passé ? Les deux premières opérations élémentaires modifient E_2 et E_3 à l'aide de E_1, et jusque-là tout va bien. Le problème vient de la dernière opération, qui vient modifier E_1 à l'aide de « E_3 ». Mais l'opération telle qu'elle est effectuée ici utilise l'*ancienne* équation E_3, et non pas la nouvelle équation E_3, celle qui vient d'être modifiée par l'opération précédente, d'où une erreur dans le nouveau système.

1.4.3 Méthode du pivot

L'idée de la méthode du pivot est de rendre un système échelonné en utilisant comme « pivot » le premier coefficient non nul d'une équation pour éliminer la variable correspondante dans les équations qui suivent.

Premier exemple : solution unique.

Considérons le système suivant en x, y, z, t :

$$(\Sigma) \begin{cases} \qquad\ \ y - \ z + \ t = 0 \\ x + 2y + 3z - 4t = 1 \\ \quad - 7y + 3z + \ t = -4 \\ 2x + 3y \qquad\ - \ t = -2 \end{cases}$$

Pourquoi n'est-il pas échelonné ? La première variable, x, apparaît effectivement dans le système : elle est affectée d'un coefficient non nul dans la deuxième et la quatrième équation. Pour que le système soit échelonné, il faudrait donc que x apparaisse dans la première équation et soit éliminée des autres. Pour cela, on commence par échanger la première équation, dans laquelle x n'apparaît pas, avec une des équations dans lesquelles elle apparaît, donc la deuxième ou la quatrième. On choisit la deuxième, car le coefficient de x y est le nombre 1 qui est idéal comme pivot pour un calcul fait par un humain (ce serait différent pour une machine). D'où l'opération élémentaire :

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{rl} y - z + t &= 0 \\ x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ -7y + 3z + t &= -4 \\ 2x + 3y - t &= -2 \end{array}\right. \xrightarrow[E_1 \leftrightarrow E_2]{} \left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ y - z + t &= 0 \\ -7y + 3z + t &= -4 \\ 2x + 3y - t &= -2 \end{array}\right.$$

On se sert ensuite du coefficient non nul de x dans la première équation comme pivot [3] pour éliminer x des équations suivantes. Ici, seule la quatrième équation est concernée, et pour y éliminer x on effectue l'opération $E_4 \leftarrow E_4 - 2E_1$:

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ y - z + t &= 0 \\ -7y + 3z + t &= -4 \\ 2x + 3y - t &= -2 \end{array}\right. \xrightarrow[E_4 \leftarrow E_4 - 2E_1]{} \left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ y - z + t &= 0 \\ -7y + 3z + t &= -1 \\ -y - 6z + 7t &= -4 \end{array}\right.$$

Ce dernier système est « échelonné en ce qui concerne la variable x ». On continue en s'intéressant maintenant à la variable y dans les trois dernières équations.

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ \mathbf{1}y - z + t &= 0 \\ -7y + 3z + t &= -4 \\ -y - 6z + 7t &= -4 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{E_3 \leftarrow E_3 + 7E_2 \\ E_4 \leftarrow E_4 + E_2}]{} \left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ \mathbf{1}y - z + t &= 0 \\ -4z + 8t &= -4 \\ -7z + 8t &= -4 \end{array}\right.$$

Ce dernier systèmé est « échelonné en ce qui concerne les variables x et y ». On continue en s'intéressant à la variable z dans les deux dernières équations. On commence par diviser E_3 par -4 pour rendre le pivot égal à 1 :

$$\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ \mathbf{1}y - z + t &= 0 \\ -4z + 8t &= -4 \\ -7z + 8t &= -4 \end{array}\right. \xrightarrow[E_4 \leftarrow 4E_4 - 7E_3]{} \left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ \mathbf{1}y - z + t &= 0 \\ \mathbf{1}z - 2t &= 1 \\ -7z + 8t &= -4 \end{array}\right.$$

puis on élimine z de la dernière équation :

$$\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ \mathbf{1}y - z + t &= 0 \\ \mathbf{1}z - 2t &= 1 \\ -7z + 8t &= -4 \end{array}\right. \xrightarrow[E_4 \leftarrow E_4 + 7E_3]{} \left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x + 2y + 3z - 4t &= 1 \\ \mathbf{1}y - z + t &= 0 \\ \mathbf{1}z - 2t &= 1 \\ -6t &= 3 \end{array}\right.$$

(3). Les pivots seront écrits **en gras**.

On obtient un système échelonné avec autant de variables que d'équations. Il y a donc une unique solution, que l'on détermine en partant du bas. On trouve $t = -1/2$, puis $z = 0$, puis $y = 1/2$ et enfin $x = -2$. L'ensemble des solutions est réduit à un élément :

$$\mathcal{S} = \{(-2, 1/2, 0, -1/2)\}.$$

Deuxième exemple : infinité de solutions.

Résolvons le système suivant en x, y, z, t, u :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5t + 4u = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4t + 7u = 22 \end{cases}$$

On aimerait se servir du pivot « 2 » dans la première équation pour éliminer la variable x des deux dernières équations. On essaie d'éviter l'apparition de fractions dans la mesure du possible :

$$\begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5t + 4u = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4t + 7u = 22 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow 2E_2 - 3E_1 \\ E_3 \leftarrow 2E_3 - 5E_1}]{} \begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ 5y - 25z + 12t + 4u = 24 \end{cases}$$

Dans ce dernier système, la variable x a été éliminée des deux dernières équations. On se sert ensuite du pivot « 1 » de la deuxième équation pour éliminer y de la dernière équation :

$$\begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ \mathbf{1}y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ 5y - 25z + 12t + 4u = 24 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \leftarrow E_3 - 5E_2]{} \begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ \mathbf{1}y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ 2t - 6u = -6 \end{cases}$$

Ce dernier système (Σ_2') est échelonné, avec strictement plus de variables que d'équations. Il y a donc une infinité de solutions, paramétrées par les variables libres z et u. On les obtient en exprimant les variables principales en fonction des variables libres :

$$\begin{cases} 2x - 5y - 4t = 4 - 3z - 2u \\ y + 2t = 6 + 5z - 2u \\ 2t = -6 + 6u \end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{S}_{\Sigma'} = \{\ (26 + 11z - 15u, 12 + 5z - 8u, z, -3 + 3u, u) \mid z, u \in \mathbb{R}\ \},$$

autrement dit :

> « l'ensemble des solutions est l'ensemble des quintuplets de la forme $(26 + 11z - 15u, 12 + 5z - 8u, z, -3 + 3u, u)$, où z et u prennent n'importe quelle valeur réelle. »

Troisième exemple : aucune solution.

Résolvons le système suivant en x, y, z, t :

$$\begin{cases} x - 2y - z + 3t = 0 \\ x - y + z + t = 2 \\ -2x + 4y + 5z - 5t = 3 \\ 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \end{cases}$$

On effectue successivement les opérations $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$, $E_3 \leftarrow E_3 + 2E_1$, $E_4 \leftarrow E_4 - 3E_1$:

$$\begin{cases} \mathbf{1}x - 2y - z + 3t = 0 \\ x - y + z + t = 2 \\ -2x + 4y + 5z - 5t = 3 \\ 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}x - 2y - z + 3t = 0 \\ y + 2z - 2t = 2 \\ 3z + t = 3 \\ -3z - t = 2 \end{cases}$$

On peut immédiatement constater que les deux dernières équation de ce nouveau système ne sont pas compatibles, ou continuer à échelonner :

$$\begin{cases} \mathbf{1}x - 2y - z + 3t = 0 \\ \mathbf{1}y + 2z - 2t = 2 \\ 3z + t = 3 \\ -3z - t = 2 \end{cases} \xrightarrow[E_4 \leftarrow E_4 + E_3]{} \begin{cases} \mathbf{1}x - 2y - z + 3t = 0 \\ \mathbf{1}y + 2z - 2t = 2 \\ \mathbf{3}z + t = 3 \\ 0z + 0t = 5 \end{cases}$$

On obtient une équation du type $0 = 1$ dans le dernier système, donc il n'y a pas de solutions. L'ensemble des solutions est vide :

$$\mathcal{S} = \varnothing$$

1.5 Systèmes à paramètres

L'expression **système à paramètres** désigne en réalité une *famille de systèmes* dépendant d'un ou plusieurs paramètres. La technique de résolution reste la même : rendre le système échelonné par la méthode du pivot. Mais on sera souvent amené à « discuter selon la valeur des paramètres », que ce soit pour échelonner le système ou pour interpréter le système échelonné final.

Paramètres dans le second membre uniquement

Exemple. Considérons que le système suivant en x, y, avec paramètres a et b :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Il possède une unique solution quelles que soient les valeurs des paramètres : cette solution est $x = (a + b)/2$ et $y = (a - b)/2$.

Exemple. Considérons à présent le système suivant en x, y, avec paramètres a, b, c :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$$

Les opérations élémentaires $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ puis $E_3 \leftarrow E_3 - 2E_1$, suivies de $E_2 \leftrightarrow E_3$ puis de $E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2$ donnent :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ 2x+y=c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+ \quad y=a \\ \quad -2y=b-a \\ \quad -y=c-2a \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+ \quad y=a \\ \quad -y=c-2a \\ \quad 0y=(b-a)-2(c-2a) \end{cases}$$

Ce dernier système est échelonné, avec une équation qui peut être du type $0 = 1$ ou du type $0 = 0$. On est donc amené à « discuter selon la valeur des paramètres » :

- Si $3a + b - 2c \neq 0$, alors la dernière équation est du type $0 = 1$, et donc le système n'a pas de solution.
- Si $3a + b - 2c = 0$, alors la dernière équation est du type $0 = 0$, donc on peut l'oublier, et le système échelonné possède une unique solution : on trouve $y = 2a - c$ puis $x = a - y = -a + c$, d'où
$$\mathcal{S} = \{(-a + c, 2a - c)\}.$$

Paramètres dans les coefficients

Ce cas demande plus de soin, car il faut s'assurer que les opérations élémentaires sont bien valides, ce qui demande généralement de « discuter selon la valeur des paramètres » lorsqu'on effectue les opérations élémentaires.

Exemple. Considérons le système suivant en x, y avec paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + (m+1)y = 1 \\ (m+1)x + \quad my = 2m \end{cases}$$

Peut-on se servir du coefficient m comme pivot pour éliminer x de la deuxième équation au moyen de l'opération $E_2 \leftarrow mE_2 - (m+1)E_1$? Non, pas sans « discussion » : si $m = 0$, alors cette opération n'est pas valide. On doit donc examiner deux cas :

Si $\mathbf{m = 0}$, alors le système est :

$$\begin{cases} y=1 \\ x \quad =0 \end{cases}$$

Il possède évidemment $(0, 1)$ comme unique solution.

Si $\mathbf{m \neq 0}$, alors l'opération $E_2 \leftarrow mE_2 - (m+1)E_1$ est valide, et donne :

$$\begin{cases} mx + (m+1)y = 1 \\ (m+1)x + \quad my = 2m \end{cases} \xrightarrow[E_2 \leftarrow mE_2 - (m+1)E_1]{} \begin{cases} mx + \quad (m+1)y = -1 \\ \quad (-2m-1)y = 2m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Ce dernier système est échelonné, mais on doit distinguer deux nouveaux sous-cas :

Si $\mathbf{m = -1/2}$, alors le système échelonné s'écrit

$$\begin{cases} -(1/2)x + (1/2)y = 1 \\ \qquad\qquad\quad 0y = 0 \end{cases}$$

et donc il possède une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(y-2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Si $\mathbf{m \neq -1/2}$ et $\mathbf{m \neq 0}$, alors le système possède une unique solution. Après simplification :

$$\mathcal{S} = \{(m, 1-m)\}$$

En conclusion :

- Si $m = 0$, alors $\mathcal{S} = \{(0,1)\}$.
- Si $m = -1/2$, alors $\mathcal{S} = \{(y-2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$
- Si $m \neq 0$ et $m \neq -1/2$, alors $\mathcal{S} = \{(m, 1-m)\}$.

1.6 Systèmes à coefficients complexes

Voir les exercices.

1.7 Rang d'un système linéaire

⚠ L'expérience montre, et on peut démontrer, que le nombre de variables libres utilisées pour paramétrer l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible ne dépend pas de la méthode utilisée pour la résolution. Le nombre de variables principales n'en dépend donc pas non plus (puisque la somme des deux est égale au nombre total de variables). D'où la définition ci-dessous.

Définition 11. Le **rang** d'un système linéaire compatible est le nombre d'équations de n'importe quel système échelonné obtenu par des opérations élémentaires.

Il peut exister plusieurs manières d'échelonner un système linéaire donné. Il peut aussi arriver qu'une technique astucieuse donne plus rapidement les solutions. Considérons par exemple le système suivant en x, y, z :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y + z \qquad = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Ce système n'est pas échelonné si on prend les variable x, y, z, t dans cet ordre. La méthode du pivot donne :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y + z \qquad = 0 \end{cases} \xrightarrow[E_2 \leftarrow E_2 - E_1]{} \begin{cases} x - \;\; y + z + t = 0 \\ \qquad 2y \qquad - t = 0 \end{cases}$$

d'où l'ensemble de solutions paramétré par z et t :

$$\mathcal{S} = \{(-t/2 - z, t/2, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \tag{1.8}$$

⚠ Le rang du système (1.7) est donc égal à 2.

Mais le système (1.7) est échelonné si on le regarde « de droite à gauche et de bas en haut », autrement dit si on le voit comme :

$$\begin{cases} t + z - y + x = 0 \\ \phantom{t + {}} z + y + x = 0 \end{cases}$$

auquel cas on voit que les solutions sont paramétrables par x et y, d'où l'ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, -x - y, 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.9}$$

Les expressions (1.8) et (1.9) sont deux descriptions différentes du même ensemble de solutions. On constate que le nombre de variables utilisées pour paramétrer les solutions est le même dans les deux cas.

1.8 Exercices

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

(a) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$
(e) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$
(f) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ y + z - 2t + 2u = 0 \\ 2x + y - 5z - 4u = 0 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les systèmes à paramètres suivants.

(a) $\begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases}$ avec paramètre $m \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$ avec paramètre $m \in \mathbb{R}$.

(c) $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ a^2x + ay + z = 0 \end{cases}$ avec paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes à paramètres suivants.

(a) $\begin{cases} \ \ x - 2y = a \\ -x + \ \ y = b \\ 2x - 5y = c \end{cases}$ avec paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x \qquad\ \ + 8z = c \end{cases}$ avec paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes à paramètres suivants.

1. $\begin{cases} x - \ \ y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - \ \ y - z = 1 \end{cases}$ avec paramètre $m \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} mx + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x + my + \ \ z = m \\ x + \ \ y + mz = m^2 \end{cases}$ avec paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Résoudre les systèmes à coefficients complexes suivants.

1. $\begin{cases} z + iw = 0 \\ iz - \ w = 0 \end{cases}$ avec inconnues $z, w \in \mathbb{C}$.

2. $\begin{cases} (1+i)z + \qquad 2w = 0 \\ \qquad\ \ z + (1-i)w = 0 \end{cases}$ avec inconnues $z, w \in \mathbb{C}$.

3. $\begin{cases} x \qquad\ \ + 2z = 0 \\ \qquad\ \ y - iz = 0 \\ -x + iy - \ \ z = 0 \end{cases}$ avec inconnues $x, y, z \in \mathbb{C}$.

2 Espaces vectoriels

2.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

© On commence par décrire l'exemple fondamental d'espace vectoriel pour le concours : l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de nombres réels. Quasiment tous les sujets de concours récents se placent dans $\mathbb{R}^n$, et même plus précisément dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$.

> **Définition 12.** Un **n-uplet** de nombres réels est une suite finie ordonnée de n nombres réels, avec d'éventuelles répétitions. On écrit $(x_1, \dots, x_n)$ pour désigner le n-uplet composé des nombres réels $x_1, \dots, x_n$ pris dans cet ordre. On dit que x_i est la i^{e} **composante**, ou **coordonnée**, de $(x_1, \dots, x_n)$. L'ensemble des n-uplets de nombres réels est noté $\mathbb{R}^n$.

Un n-uplet est aussi appelé un **couple** lorsque $n = 2$, un **triplet** lorsque $n = 3$, un **quadruplet** lorsque $n = 4$, etc. Par exemple, $(1, 3)$ est un couple, $(1, 2, -3)$ est un triplet, et $(\sqrt{3}/2, -2, 0, 1)$ est un quadruplet. L'ordre et les éventuelles répétitions sont importants : ainsi $(1, 3)$ et $(3, 1)$ sont des couples différents, eux-mêmes différents du triplet $(1, 3, 1)$.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire, les n-uplets sont appelés **vecteurs** et les nombres réels sont appelés **scalaires**. Un vecteur important est le n-uplet dont toutes les composantes sont nulles. On le note $0_{\mathbb{R}^n}$ et on le nomme **vecteur nul** :

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0).$$

On définit à présent les deux opérations fondamentales qui font de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel : l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

> **Définition 13.** Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux n-uplets, et soit λ un nombre réel.
> - La **somme** de x et y est définie par $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
> - Le **produit** de x par λ est défini par $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on a $(3, 1) + (1, 2) = (4, 3)$ et $3(1, -2) = (3, -6)$.

Représentation géométrique de $\mathbb{R}^2$. Considérons le plan muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On peut alors représenter tout couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par un point A du plan, et réciproquement. Au lieu de représenter le couple par un point, on peut aussi le représenter par une flèche issue de l'origine et d'extrémité ce point, ce qui correspond mieux à la notion de « vecteur » [1]. Voir la figure 2.1.

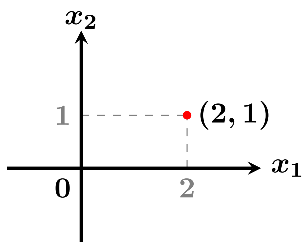

FIGURE 2.1 – Un couple vu comme un point (à gauche), et comme une flèche (à droite)

L'addition des vecteurs, qui se fait géométriquement par la « règle du parallélogramme », et la multiplication d'un vecteur par un scalaire [2] sont illustrées par la figure 2.2.

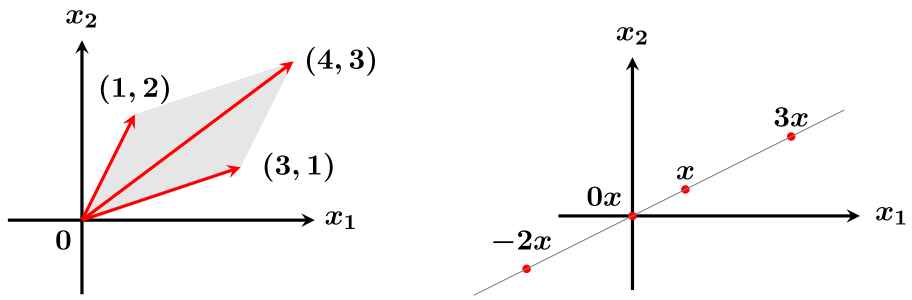

FIGURE 2.2 – Somme de deux vecteurs (à gauche) et multiples d'un vecteur (à droite)

Représentation géométrique de $\mathbb{R}^3$. On a de même une représentation géométrique des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par des points de l'espace muni d'un repère.

2.2 Espaces vectoriels : définition

Un *espace vectoriel* est un ensemble muni de deux opérations vérifiant quelques règles de calcul élémentaires, à partir desquelles on déduit d'autres règles de calcul utiles.

© Seuls les espaces vectoriels *réels* sont au programme. Les épreuves du concours font peu appel à la définition qui va suivre, car elles se placent dans des espaces vectoriels concrets, essentiellement $\mathbb{R}^n$.

(1). Attention, le vecteur nul ne se prête pas à cette représentation par une flèche orientée.
(2). Ici, la représentation par des points, et non par des flèches, est plus adaptée.

Définition 14. Un **espace vectoriel réel** est un ensemble non vide E dont les élements sont appelés **vecteurs**, muni d'une opération interne qui à deux vecteurs u, v associe un vecteur noté $u + v$ et d'une opération externe qui à un nombre réel λ et un vecteur u associe un vecteur noté $\lambda.u$, vérifiant les conditions suivantes :

1. $u + v = v + u$ quels que soient $u, v \in E$;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ quels que soient $u, v, w \in E$;
3. il existe un vecteur particulier 0_E tel que $u + 0_E = 0_E + u = u$ quel que soit $u \in E$;
4. pour tout $u \in E$, il existe un $v \in E$ tel que $u + v = v + u = 0_E$;
5. $1.u = u$ quel que soit $u \in E$;
6. $\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$ quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u \in E$;
7. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$ quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$;
8. $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$ quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

Les nombres réels, par lesquels on peut multiplier les vecteurs, sont appelés **scalaires**. L'opération qui à deux vecteurs u et v associe $u + v$ est appelée **addition des vecteurs**, celle qui à un scalaire λ et un vecteur u associe $\lambda.u$ est appelée **multiplication d'un vecteur par un scalaire**. On écrit le plus souvent λu au lieu de $\lambda.u$.

La condition 1 dit que l'addition est *commutative*, la condition 2 dit qu'elle est *associative*. La condition 3 dit que 0_E est un *élément neutre* pour l'opération $+$, et on montre facilement qu'il ne peut exister qu'un seul vecteur ayant cette propriété. On dit que 0_E est le **vecteur nul** de l'espace vectoriel. La condition 4 dit que tout vecteur possède un *symétrique* pour la loi $+$, et on montre facilement que ce symétrique est unique. Le symétrique de u est noté $-u$ et est appelé l'**opposé** de u.

Les huit conditions de la définition 14 doivent être vues comme des « règles de calcul élémentaires » dans un espace vectoriel. A partir de celles-ci, on démontre d'autres règles de calcul utiles, notamment parmi les plus utilisées :

- Quels que soient les vecteurs u, v, w, si $u + v = u + w$ alors $v = w$.
- $0_\mathbb{R} u = 0_E$ quel que soit le vecteur u, et de même $\lambda 0_E = 0_E$ quel que soit le scalaire λ.
- Quel que soit $u \in E$, on a $-u = (-1)u$, autrement dit $(-1)u$ est l'opposé de u.
- Si $\lambda u = 0_E$, alors $\lambda = 0_\mathbb{R}$ ou $u = 0_E$.

Démontrer ces nouvelles règles de calcul est un exercice instructif .

2.3 Autres exemples d'espaces vectoriels

Voici d'autres exemples importants d'espaces vectoriels.

2.3.1 Suites réelles

Notons $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites de nombres réels indexées par $\mathbb{N}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple. Les suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On définit la somme $u + v$ de deux suites, et le produit λu d'une suite par un nombre réel, de manière analogue à ce que l'on a fait pour les n-uplets :

$$u + v := (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda u := (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Par exemple, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + (3^n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n + 3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $2(2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On vérifie sans difficulté que $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel réel. Son vecteur nul est la suite nulle.

Variantes. On a de même l'espace vectoriel des suites indexées par $\mathbb{N}^*$, par les entiers supérieurs ou égaux à 2, etc.

2.3.2 Fonctions réelles

Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit de la manière usuelle la somme $f + g$ de deux fonctions f et g, et le produit λf d'une fonction f par un nombre réel λ :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

On vérifie sans difficulté que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel réel. Son vecteur nul est la fonction nulle.

Variantes. On a de même l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}+$, sur $[0, 1]$, etc.

2.3.3 Matrices ⊕

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à n lignes et p colonnes, muni des deux opérations « addition des matrices » et « multiplication d'une matrice par un nombre », est un espace vectoriel réel.

2.4 Sous-espaces vectoriels

La plupart des espaces vectoriels que l'on rencontre sont soit des espaces vectoriels de référence (on vient d'en donner les principaux), soit des *sous-espaces vectoriels* d'espaces vectoriels déjà connus. Il suffit de vérifier trois conditions simples (voir la définition ci-dessous) pour montrer que le sous-espace vectoriel « hérite » des opérations de l'espace de référence, et devient ainsi lui-même un espace vectoriel.

On se place dans un espace vectoriel E.

Définition 15. Un **sous-espace vectoriel** de E est un sous-ensemble F de E qui vérifie les trois conditions suivantes :

1. 0_E appartient à F ;
2. $u + v \in F$ quels que soient $u, v \in F$;
3. $\lambda u \in F$ quels que soient $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples. ✎

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- $\{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- ⬇ L'ensemble des matrices 2×2 symétriques est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

Remarques.

1. La condition 2 dit que F est *stable par addition*. La condition 3 dit que F est *stable par multiplication par les scalaires*.
2. Les conditions 2 et 3 peuvent être remplacées par l'unique condition suivante : $\lambda u + \mu v \in F$ quels que soient $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La condition 1 est parfois remplacée par la condition « F n'est pas vide ».

Théorème 16. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F, muni des restrictions de l'addition de E et de la multiplication par les scalaires, est lui-même un espace vectoriel.

Démonstration. ✎✎ On vérifie les huit conditions de la définition « espace vectoriel ». □

Proposition 17. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors leur intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. ✎ Vérification directe. □

Remarque. La réunion $F \cup G$ n'est généralement pas un sous-espace vectoriel (seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$), et le complémentaire $E \setminus F$ n'est jamais un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul). Voir l'exercice 11.

© La proposition qui suit est importante : considérer l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients réels est l'une des deux manière fondamentales de se donner un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (l'autre est de considérer l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, voir la section 2.5).

Proposition 18. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. ✎ On le démontre pour une équation, puis on applique la proposition qui précède. □

Exemple. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z - t = 0, x - y + t = 0\}$. Il s'agit d'un sous-ensemble de l'espace vectoriel de référence $\mathbb{R}^4$, donné comme l'ensemble des solutions de deux équations linéaires homogènes. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Application : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. La proposition 18 permet de dire que :

- Les droites de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Chaque telle droite est en effet l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.
- Les droites et les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Chaque tel plan (respectivement droite) est en effet l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène (respectivement d'un système linéaire homogène à deux équations).

2.5 Combinaisons linéaires

On se place dans un espace vectoriel E.

Définition 19. Soient $u_1, \ldots, u_k \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. On dit que le vecteur

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \tag{2.1}$$

est la **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Les coefficients peuvent être des réels quelconques, y compris 0. Voici quelques exemples de combinaisons linéaires de deux vecteurs u_1 et u_2 :

$$u_1 + u_2, \quad 2u_1 - 3u_2, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2, \quad u_1, \quad 0_E.$$

Pour les deux derniers, on a en effet $u_1 = 1u_1 + 0u_2$ et $0_E = 0u_1 + 0u_2$.

Exemple. ✎ Dans $E = \mathbb{R}^3$:

1. $(2, 3, 4)$ est combinaison linéaire de $(0, 1, 2)$ et $(1, 2, 3)$.
2. Tout vecteur est combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Remarques.

1. Le vecteur nul 0_E est toujours combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$, quels que soient $u_1, \dots, u_k$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors toute combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs de F appartient encore à F (démonstration par récurrence).

Cas particulier : colinéarité de deux vecteurs Lorsque $k = 1$ dans la définition précédente, on a un vocabulaire particulier.

Définition 20. Soient u, v deux vecteurs. On dit que v est **colinéaire à** u si c'est un multiple de u, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$. On dit que u et v sont **colinéaires** si l'un des deux est colinéaire à l'autre.

Le vecteur nul 0_E est colinéaire à tout autre vecteur, mais le seul vecteur colinéaire à 0_E est 0_E lui-même.

2.6 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition 21. Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$:

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) := \{v \in E \mid \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k\}.$$

On dit que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est le **sous-espace engendré** par $u_1, \dots, u_k$.

Remarques. Il est évident que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ sont écrits. Par convention [(3)], on pose $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on a $(1, 6, 11) \in \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (1, 2, 3))$, mais $(-1, 2, 3) \notin \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (1, 2, 3))$.
2. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1, 1), (1, -1))$.

Le résultat suivant dit que le sous-espace engendré par $u_1, \dots, u_k$ est le plus petit [(4)] sous-espace vectoriel de E qui contient tous les vecteurs $u_1, \dots, u_k$.

Théorème 22. Soient $u_1, \dots, u_k \in E$. Alors :

1. $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de E, et chacun des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ appartient à $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

(3). L'intérêt est d'avoir des résultats plus simples à énoncer par la suite.
(4). Le plus petit au sens de l'inclusion.

2. Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $u_1, \dots, u_k$ appartiennent à F, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est contenu dans F.

Démonstration. ✎ □

Exemple. ✎ On pose $F = \mathrm{Vect}((1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1))$ et $G = \{(x,y,z,t \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$. Alors $F \subset G$.

Dans le résultat suivant, dont on se servira plus loin, on s'intéresse à ce qui se passe lorsqu'on rajoute un vecteur à la famille.

Proposition 23. Soient $u_1, \dots, u_k$ et v des vecteurs de E. Alors :

(a) $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k, v)$.

(b) $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k, v)$ si et seulement si $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Démonstration. ✎ □

2.7 Familles libres et familles génératrices

On se place dans un espace vectoriel E. Étant donnés des vecteurs $u_1, \dots, u_k$, on rappelle que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \tag{2.2}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. On dit qu'un tel vecteur v **se décompose** comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$, ou plus simplement que v « se décompose sur $u_1, \dots, u_k$ ».

Définition 24. Soient $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est **libre**, ou encore que les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ sont **linéairement indépendants**, si tout vecteur $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ se décompose *de manière unique* comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est **liée** si elle n'est pas libre.

Remarques. Par convention, on dit que la famille $\varnothing$ est libre. Il est évident d'après la définition que toute sous-famille d'une famille libre est libre, et que toute sur-famille d'une famille liée est liée. Il est également évident que le fait qu'une famille soit libre ou non ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans la famille. Enfin, toute famille contenant le vecteur nul est liée, de même que toute famille dans laquelle un vecteur est répété.

⚠ La définition « famille libre » que l'on vient de donner est naturelle, mais elle ne donne pas de moyen rapide de vérifier si une famille est libre ou non. L'intérêt du point 1 du théorème qui suit, qui est d'ailleurs la définition de « famille libre » qui est généralement donnée, est de dire qu'il suffit de regarder un seul vecteur : le vecteur nul.

Proposition 25. Soient $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs de E.

1. ⚠ La famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_k$ qui est égale au vecteur nul est celle dans laquelle tous les coefficients sont nuls.
2. La famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres (ici on suppose $k \geq 2$).

Démonstration. ✎ □

Exemple. ✎ Dans $\mathbb{R}^3$:

- la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est libre ;
- la famille $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5))$ est liée.

Le cas d'une famille à 1 ou 2 vecteur est particulièrement fréquent :

Corollaire 26. Une famille constituée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul. Une famille constituée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

Démonstration. ✎ □

Exemple. ✎ Dans $\mathbb{R}^3$:

- Le vecteur $(1, 0, -1)$ constitue à lui seul une famille libre.
- La famille $((1, 0, -1), (1, 2, 3))$ est libre, et la famille $((1, 0, -1), ((-2, 0, 2))$ est liée.

⚠ Dès qu'il y a strictement plus que deux vecteurs dans une famille, le fait que les vecteurs soient non colinéaires deux à deux **n'entraîne pas** que la famille soit libre. [(5)] Par exemple, la famille $((1, 0), (0, 1), (1, 1))$ n'est pas libre (✎).

Définition 27. Soient $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ **engendre** E, ou encore que c'est une **famille génératrice** de E, si tout vecteur v de E se décompose comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_k$.

Remarques. Par convention, on dit que la famille vide $\varnothing$ engendre le sous-espace nul $\{0_E\}$. Il est évident par la définition que toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice, et que le fait qu'une famille soit génératrice ou non ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans la famille.

⚠ Lorsque E est un sous-espace vectoriel d'un espace plus gros, il est important que les vecteurs d'une famille génératrice de E soient bien des vecteurs de E. Par exemple, puisque la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^3$, il est vrai que tout vecteur

(5). Il s'agit d'une erreur très fréquente.

de $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ est combinaison linéaire de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Mais $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ n'est pas une famille génératrice de E, car ses vecteurs n'appartiennent pas à E.

Le résultat suivant permet de comprendre à quelle condition une famille libre reste libre lorsqu'on lui rajoute un vecteur, et à quelle condition une famille génératrice reste génératrice lorsqu'on lui enlève un vecteur.

Proposition 28. Soient $u_1, \dots, u_k$ et v des vecteurs de E.

1. On suppose que $(u_1, \dots, u_k)$ est libre. Alors $(u_1, \dots, u_k, v)$ est encore libre si et seulement si v n'est pas combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$.
2. On suppose que $(u_1, \dots, u_k, v)$ engendre E. Alors $(u_1, \dots, u_k)$ engendre encore E si et seulement si v est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$.

Démonstration. ✎ □

2.7.1 Bases

On se place dans un espace vectoriel E.

Définition 29. Une **base** de E est une famille de vecteurs de E qui est libre et qui engendre E.

Exemple. ⚠ Dans $\mathbb{R}^n$, posons $e_1 := (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$..., $e_n = (0,\dots,0,1)$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la **base canonique** (6) de $\mathbb{R}^n$.

⚠ Un espace vectoriel donné possède de nombreuses bases (une infinité, en fait). Par exemple, $((1,0),(0,1))$ et $((1,1),(1,-1))$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 30. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Il y a équivalence entre :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. Tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$:

$$\forall v \in E, \exists!\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \mid v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n. \tag{2.3}$$

Remarque. Signalons deux autres caractérisations utiles pour l'intuition : il y a équivalence entre (i) $\mathcal{B}$ est une base de E ; (ii) $\mathcal{B}$ est une *famille libre maximale*, c'est à dire qu'elle est libre mais qu'elle cesse de l'être dès qu'on lui rajoute un vecteur, quel qu'il

(6). Une base « canonique » est une base « plus simple que toutes les autres ». D'autres espaces vectoriels que $\mathbb{R}^n$ possèdent des bases canoniques.

soit ; (iii) $\mathcal{B}$ est une *famille génératrice minimale* de E, c'est à dire qu'elle engendre E mais qu'elle cesse de le faire dès qu'on lui enlève un vecteur, quel qu'il soit.

Démonstration. ✎ □

Définition 31. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E, et soit $v \in E$. Les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifiant l'égalité (2.3) sont appelés les **coordonnées**, ou **composantes**, du vecteur v **dans la base** $\mathcal{B}$.

Exemple. ⚠ Les coordonnées de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont les nombres $x_1, \dots, x_n$ dans cet ordre. En effet :

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \dots, 0, 1).$$

⚠ Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple. Les coordonnées de $(3, 1)$ dans la base canonique sont 3 et 1, dans cet ordre (voir l'exemple précédent). Les coordonnées du même vecteur $(3, 1)$ dans la base $((1, 1), (1, -1))$ sont 2 et 1, car $(3, 1) = 2(1, 1) + 1(1, -1)$.

Théorème 32 (théorème de la base incomplète / de la base extraite)**.** On suppose que $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_l)$ est une famille génératrice de E.

1. Soit $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors $k \leq l$, et si $\mathcal{L}$ n'est pas une base de E alors on peut la compléter en une base de E en lui ajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$.
2. Il existe une base de E extraite [a] de $\mathcal{G}$.

a. C'est-à-dire obtenue à partir de $\mathcal{G}$ en lui enlevant un certain nombre de vecteurs, éventuellement aucun si $\mathcal{G}$ est déjà une base.

Démonstration. ✎✎ □

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (u, v) est une famille libre. Pour la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$, on va lui ajouter un vecteur (car la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, et que toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ possèdent 3 vecteurs, voir ci-dessous). La base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est génératrice, donc on peut compléter en prenant un vecteur bien choisi de cette base. Attention : on ne peut pas compléter par $(1, 0, 0)$ puisque c'est le vecteur u, et pas non plus par $(0, 1, 0)$, car c'est $v - u$. Mais on vérifie facilement que $(u, v, (0, 0, 1))$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 33. Si E possède une famille génératrice finie, alors E possède une base finie.

2.8 Dimension d'un espace vectoriel

© Le programme du concours se limite aux espaces vectoriels *de dimension finie* (voir définition ci-dessous).

On se place dans un espace vectoriel E.

Définition 34. Un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il possède une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Remarque. On trouve souvent la définition : « E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs ». Les deux définitions sont équivalentes (voir le corollaire de la section précédene).

⚠ On suppose désormais que E est de dimension finie.

Théorème et Définition 35. Toute les bases de E possèdent le même nombre de vecteurs. La **dimension** de E, notée $\dim(E)$, est le nombre de vecteurs de n'importe quelle base de E.

Démonstration. ✎ □

Exemple. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ possède n vecteurs, donc $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et sa dimension est n.

Exemple. La dimension de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est 2. En effet, une base de ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

⚠ © Plus généralement, la méthode du pivot de Gauss donne *automatiquement* une base de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Théorème 36. Soit $n = \dim(E)$. Alors :

1. Propriétés des familles libres de E :
   a) Toute famille libre possède au plus n vecteurs.
   b) Tout famille libre qui possède n vecteurs est une base de E.
   c) Toute famille qui possède strictement plus de n vecteurs n'est pas libre.
2. Propriétés des familles génératrices de E :
   a) Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.
   b) Toute famille génératrice de E qui possède n vecteurs est une base de E.
   c) Toute famille qui possède strictement moins de n vecteurs n'engendre pas E.

Démonstration. ✐ □

Exemple. Considérons $E = \text{Vect}(u, v, w)$, où $u = (2, 1, -3, 1)$, $v = (4, 3, 2, -5)$ et $w = (-1, 2, 3, 4)$. Par définition, la famille (u, v, w) engendre E. Donc $\dim(E) \leq 3$. D'autre part, il est clair que la famille (u, v) est libre. Donc $\dim(E) \geq 2$. Ainsi la dimension de E est 2 ou 3. Pour aller plus loin, il faut déterminer si la famille (u, v, w) est libre ou non : si elle l'est alors c'est une base de E qui est donc de dimension 3, si elle ne l'est pas alors (u, v) est une base de E qui est donc de dimension 2.

Proposition 37. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim(F) \leq \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration. ✐✐✐ □

Exemple. Considérons $F = \text{Vect}((1, 1, -1, -1)(1, -1, 1, -1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, y + z = 0\}$. Il est facile de voir que F et G sont tous les deux des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et qu'ils sont de même dimension 2. De plus, les deux vecteurs qui engendrent F vérifient les deux équations qui définissent G, donc F est un sous-espace vectoriel de G. D'après la proposition précédente, on a donc $F = G$.

Définition 38. Une **droite vectorielle** (respectivement un **plan vectoriel**) de E est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 1 (respectivement de dimension 2).

Exemple. $\text{Vect}(1, 2, 3, 4)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$, et $\text{Vect}((1, 1, 1, 1,), (1, -1, 2, 0))$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2.9 Sommes de sous-espaces, sommes directes, sous-espaces supplémentaires

Trois nouvelles définitions viennent généraliser des notions déjà rencontrées :

- la « somme de plusieurs sous-espaces vectoriels » généralise le « sous-espace engendré par une famille de vecteurs » ;
- la notion de « sous-espaces en somme directe » généralise celle de « famille libre » ;
- la notion de « sous-espaces supplémentaires » généralise celle de « base ».

© Le cas de la somme de *deux* sous-espaces vectoriels est le plus important pour le concours, mais le programme précise (entre parenthèses...) que le cas de plus de deux sous-espaces doit être connu.

Somme de sous-espaces vectoriels

On se place dans un espace vectoriel E. On considère des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$ de E.

Définition 39. La **somme** $F_1 + \cdots + F_k$ est l'ensemble des vecteurs v de E qui peuvent s'écrire sous la forme $v = u_1 + \cdots + u_k$ avec $u_1 \in F_1, \dots, u_k \in F_k$.

Autrement dit :

$$F_1 + \cdots + F_k := \{v \in E \mid \exists\, u_1 \in F_1, \dots, \exists\, u_k \in F_k, v = u_1 + \cdots + u_k\}. \tag{2.4}$$

Remarque. ✎ On vérifie facilement que $\mathrm{Vect}(u_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(u_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. La notion de « somme de sous-espaces vectoriels » généralise donc la notion de « sous-espace engendré par une famille de vecteurs ».

Exemple. ✎ Posons $F := \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(1,0,1,0))$ et $G := \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(0,1,0,-1))$. Il s'agit de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ (sous-espaces de dimension 2). Posons $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,0,1,0)$ et $w = (0,1,0,-1)$, de sorte que $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,w)$.

1. Déterminer les dimensions de F et G.
2. Montrer que (u,v,w) engendre $F+G$. En déduire la dimension de $F+G$.

⚠ ✎ Cet exemple vient d'illustrer un fait général : la juxtaposition de familles génératrices de $F_1, \dots, F_k$ fournit une famille génératrice de $F_1 + \cdots + F_k$.

Le résultat suivant exprime le fait que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient chacun des sous-espaces $F_1, \dots, F_k$, tout comme $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient chacun des vecteurs $u_1, \dots, u_k$.

Proposition 40.
1. $F_1 + \cdots + F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $F_1, \dots, F_k$ sont contenus dans $F_1 + \cdots + F_k$.
3. Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \subset H, \dots, F_k \subset H$, alors $F_1 + \cdots + F_k \subset H$.

Démonstration. ✎✎ □

Somme directe

Le cadre reste le même : un espace vectoriel E et des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$.

Définition 41. On dit que $F_1, \dots, F_k$ sont **en somme directe** si tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_k$ s'écrit *de manière unique* sous la forme $v = u_1 + \cdots + u_k$ avec $u_1 \in F_1, \dots, u_k \in F_k$. Dans ce cas, on écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ au lieu de $F_1 + \cdots + F_k$.

⚠ La somme $F_1 + \cdots + F_k$ existe toujours ; il se peut qu'elle soit directe ou qu'elle ne le soit pas. Écrire $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, c'est présenter la somme $F_1 + \cdots + F_k$ *en affirmant en même temps qu'elle est directe.* Dans une question comme « Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ », il y a donc deux choses différentes à faire : d'une part montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$, d'autre part montrer que F et G sont en somme directe.

Remarque. Dans le cas particulier où $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1), \dots, F_k = \mathrm{Vect}(u_k)$, c'est-à-dire si tous les F_i sont de dimension 1, on vérifie facilement que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.

⚠ Le résultat suivant est très utile pour montrer que deux sous-espaces sont en somme directe. Il est en fait souvent présenté comme la *définition* de « somme directe » de deux sous-espaces, mais l'inconvénient de cette définition est qu'elle ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-espaces.

Proposition 42. Soit E un espace vectoriel, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration. ✎ □

Sous-espaces supplémentaires

On considère toujours un espace vectoriel E et des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_k$.

Définition 43. On dit que $F_1, \dots, F_k$ sont **supplémentaires** dans E si tout vecteur v de E s'écrit de manière unique sous la forme $v = u_1 + \cdots + u_k$ avec $u_1 \in F_1, \dots, u_k \in F_k$.

⚠ Autrement dit, les sous-espaces sont supplémentaires dans E s'ils sont en somme directe et si leur somme est égale à E tout entier.

Remarque. Dans le cas particulier où $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1), \dots, F_k = \mathrm{Vect}(u_k)$, c'est-à-dire lorsque les sous-espaces sont tous de dimension 1, on vérifie facilement que $F_1, \dots, F_k$ sont supplémentaires dans E si et seulement si $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de E.

⚠ Le résulat suivant est très utile pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires (les points 3 et 5 sont les plus utilisés).

Théorème 44. Soit E un espace vectoriel, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Il y a alors équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$.
3. F et G sont en somme directe et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

4. $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
5. La juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Démonstration. ✐✐ □

Généralisation à un nombre quelconque de sous-espaces Ce résultat est encore vrai pour un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels :

Théorème 45. Soit E un espace vectoriel, et soient $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Il y a alors équivalence entre :

1. $F_1, \dots, F_k$ sont supplémentaires dans E.
2. $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe et $E = F_1, + \dots + F_k$.
3. $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe et $\dim(F_1) + \dots + \dim(F_k) = \dim(E)$.
4. $F_1 + \dots + F_k$ et $\dim(F_1) + \dots + \dim(F_k) = \dim(E)$.
5. La juxtaposition de bases de $F_1, \dots, F_k$ est une base de E.

Démonstration. ✐✐ □

2.10 Exercices

Combinaisons linéaires

Exercice 6. Montrer que le vecteur nul 0_E est toujours combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$, quels que soient ces vecteurs de E.

Exercice 7.

1. Le vecteur $(4, -5)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 2)$ et $(2, 3)$?
2. Le vecteur $(2, 3, 4)$ est-il combinaison linéaire de $(0, 1, 2)$ et $(1, 2, 3)$? Même question pour le vecteur $(1, 3, 4)$.
3. Le vecteur $(2, -4, -1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 0, -1)$, $(0, 5, 2)$, $(-2, 1, 1)$ et $(-1, 1, 0)$?
4. Pour les vecteurs qui sont effectivement combinaison linéaire, la combinaison linéaire trouvée était-elle unique ?

Exercice 8. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(a, a + 1, a + 2)$ est combinaison linéaire de $(1, 2, 1)$ et $(1, -1, 0)$.

Exercice 9. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, et cela d'une unique manière. Généraliser à $\mathbb{R}^n$ pour n quelconque.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 10. Est-ce que $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Même question pour $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$.

Exercice 11. Soient F, G deux sous-espaces vectoriel de E tels que $F \cup G$ soit également un sous-espace vectoriel. On veut montrer qu'alors $F \subset G$ ou $G \subset F$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que la conclusion est fausse :

1. Pourquoi cela entraîne-t-il l'existence d'un vecteur $u \in F \setminus G$ et d'un vecteur $v \in G \setminus F$?
2. Avec les notations de la question précédente, pourquoi doit-on avoir $u + v \in F \cup G$?
3. Mais alors, pourquoi devrait-on nécessairement avoir $u \in G$ et $v \in G$?
4. Conclure le raisonnement.

Sous-espace engendré

Exercice 12. On pose $F = \text{Vect}((1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1))$ et $G = \{(x,y,z,t \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0$. Montrer que $F \subset G$.

Familles libres

Exercice 13. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $((1,0,-1))$
2. $((1,-1,0),(2,-1,1))$

Exercice 14. La famille $((1,2,1),(1,-1,1),(1,1,0)$ est-elle libre ? La famille $((1,-1,0),(2,-1,1),(0,1,1))$ est-elle libre ?

Exercice 15 (ENSA 2011)**.** Soit a un nombre réel. Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (1,-2,0)$, $v = (1,a,0)$ et $w = (0,0,1)$. Pour quelle valeur de a ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 16. On suppose que la famille (u,v,w) est libre. Montrer qu'alors la famille $(v+w, u+w, u+v)$ est également libre.

Familles génératrices

Exercice 17.

1. Déterminer une famille génératrice de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z = 0\}$.
2. Montrer que $((-3,2,1),(1,0,-1))$ est une famille génératrice de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

Bases et dimension

Exercice 18. Montrer que les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^2$:

1. $((1,0),(0,1))$;
2. $((1,1),(1,-1))$;
3. $((1,1),(1,2))$.

Exercice 19. Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x-5y+z=0, y+z=0\}$.
2. $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4; x+z-2t=0, x+y+t=0, 2x-y+3z=0\}$.
3. $H=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4; x_1=2x_2-x_3, x_4=x_1+x_2+x_3\}$.

Exercice 20. Compléter $(1,2,0)$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 21. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants : $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4; x-2y=0\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4; y+2z+3t=0\}$. Donner une base et la dimension de F, de G, de $F\cap G$.

Exercice 22. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 3x-y+2z=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de F, donner la dimension de F, puis compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23. Soit E (respectivement F) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs e_1 et e_2 (respectivement par les vecteurs e_3 et e_4), où

$$e_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}.$$

Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 24. Soit E un espace vectoriel admettant une base (e_1,e_2,e_3). Montrer que $(e_2+e_3, e_1+e_3, e_1+e_2)$ est également une base de E.

Sommes, sommes directes, sous-espaces supplémentaires

Exercice 25 (Oral ENV 2006, modifié)**.**

1. Justifier que $F=\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-2z=t \text{ et } t-x+y=0\}$ est un espace vectoriel.
2. Donner une base et la dimension de F.
3. On note $G_1=\mathrm{Vect}((0;1;1;0),(-1;4;0;1))$ et $G_2=\mathrm{Vect}((0;-1;1;0),(-1;4;0;1))$.
   a) Déterminer la dimension de G_1 et celle de G_2.
   b) Montrer que $F\cap G_1=0$. En déduire que $F\oplus G_1=\mathbb{R}^4$.
   c) Est-ce que $F\oplus G_2=\mathbb{R}^4$?

3 Matrices

3.1 Définition

Définition 46. Une **matrice réelle** est un tableau rectangulaire de nombres réels, appelés **coefficients** de la matrice.

Une matrice comprend des **lignes** et des **colonnes**. On dit qu'une matrice à n lignes et p colonnes est de **type** (n, p), ou encore $n \times p$. L'ensemble des matrices réelles de type $n \times p$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Par exemple,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

est une matrice réelle de type 3×4, autrement dit $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Son coefficient situé sur la 2ème ligne et la 3ème colonne est le nombre 6.

De manière générale, le coefficient de A situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est noté a_{ij}, ou parfois A_{ij} ; le premier indice est l'indice de ligne, le second est l'indice de colonne. Par exemple, $a_{32} = -1$ pour la matrice (3.1). Une matrice A de type $n \times p$ s'écrit donc

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ou encore, sous forme condensée, $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, ou simplement $A = [a_{ij}]$ si les entiers n et p ont déjà été précisés et qu'aucune ambiguïté n'est possible.

⚠ En remplaçant partout « nombre réel » par « nombre complexe » et $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, on obtient la notion de matrice complexe. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 2-3i \\ 1+i & 0 & 1+i \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{C})$$

3.2 Matrices particulières

La **matrice nulle** de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}$, ou $0_{n,p}$, ou parfois simplement 0. Par exemple :

$$0_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad 0_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Attention à ne pas confondre des matrices nulles de tailles différentes.

Une **matrice ligne** est une matrice qui est de type $1 \times p$ pour un certain entier p, c'est à dire qui n'a qu'une seule ligne. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

est une matrice ligne (à 4 colonnes). Les lignes d'une matrice sont souvent vues comme des matrices lignes. De même, une **matrice colonne** est une matrice qui est du type $n \times 1$ pour un certain entier n, c'est à dire qui n'a qu'une seule colonne. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice colonne (à 3 lignes). Les colonnes d'une matrice sont souvent vues comme des matrices colonnes.

Une **matrice ponctuelle** est une matrice à 1 ligne et 1 colonne, donc à un seul élément. On identifie souvent la matrice $[a] \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ au nombre réel a.

3.3 Identification des n-uplets avec des vecteurs-colonne

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont souvent identifiés à des vecteurs-colonne. Par exemple (sujet ENSAB 2013), on peut voir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

à la fois comme d'une matrice-colonne (1) à 4 lignes, avec laquelle on peut faire du calcul matriciel (voir plus loin), et comme l'élément $(0, 0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.

⚠ Dans la plupart des cas, les deux notations ne sont pas mélangées. Par exemple, le sujet ENSAB 2013 adopte une notation purement matricielle pour parler des éléments de $\mathbb{R}^4$.

(1). Le sujet de concours utilise les parenthèses pour les matrices.

3.4 Opérations sur les matrices

On définit trois opérations fondamentales sur les matrices : l'addition de deux matrices de même type, la multiplication d'une matrice par un scalaire, et la multiplication de deux matrices.

3.4.1 Somme de deux matrices, produit d'une matrice par un scalaire

Définition 47. La **somme** de deux matrices A et B de même type est la matrice de même type notée $A+B$ obtenue en faisant la somme « coefficient par coefficient » :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Le **produit** d'une matrice A par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice de même type notée λA obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice par ce scalaire :

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

On définit aussi :

$$-A := (-1)A \quad \text{et} \quad A - B := A + (-B).$$

Comme les opérations sont définies « coefficient par coefficient », il est facile de montrer les règles de calcul suivantes dans $M_{np}(\mathbb{R})$:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+B = B+A$
3. $A + 0_{np} = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8. $1A = A$

Proposition 48. L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ muni des deux opérations définies ci-dessus est un espace vectoriel, de dimension *np*.

Démonstration. Les huit règles de calculs vues plus haut disent que $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. ✎ Une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est constituée des **matrices élémentaires** de type $n \times p$: ce sont les matrices dont l'un des coefficients est égal à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Il y a np telles matrices, donc la dimension de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est égale à np. □

Par exemple, l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ contient quatre matrices élémentaires :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est évident qu'une matrice 2×2 quelconque se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ces quatre matrices élémentaires forment donc bien une base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension $4 = 2 \times 2$.

3.4.2 Produit de matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Commençons par multiplier une matrice ligne L par une matrice colonne X ayant le même nombre de coefficients. Ce produit sera utilisé ensuite comme « brique élémentaire » pour comprendre le produit général des matrices.

Définition 49. Si $L = [a_1 \cdots a_n] \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le **produit** LX est la matrice ponctuelle définie par :

$$LX := [a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n],$$

souvent identifiée à son unique coefficient.

Exemple. $[1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [(1 \times 2) + (2 \times 0) + (3 \times (-1))] = [-1].$

⚠ On peut voir le coefficient de LX comme le produit scalaire des deux n-uplets correspondant à L et X. Par exemple, le produit scalaire de $(1, 2, 3)$ et $(2, 0, -1)$ est $(1 \times 2) + (2 \times 0) + (3 \times (-1)) = -1$.

Produit d'une matrice par une matrice colonne

On définit ensuite le produit d'une matrice A par une matrice colonne X, lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de X (condition de compatibilité).

Définition 50. Le produit d'une matrice A de taille $n \times p$ par une matrice-colonne X à p lignes est la matrice-colonne AX à n lignes définie par :

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

⚠ Autrement dit, la i^{e} ligne du produit AX est le produit de la i^{e} ligne de A par la colonne X :

$$AX := \begin{bmatrix} L_1(A)X \\ \vdots \\ L_n(A)X \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}),$$

où les lignes de A sont notées $L_1(A), \ldots, L_n(A)$.

Exemple. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 4) + (2 \times 3) + ((-1) \times 7) \\ (0 \times 4) + ((-5) \times 3) + (3 \times 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Interprétation du produit par une matrice colonne ⚠

Réécrivons la définition de AX donnée par (3.5) :

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_p \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{n1p} \end{bmatrix}$$

On voit ainsi que AX est la **combinaison linéaire** des vecteurs colonnes de A affectés des poids $x_1, \ldots, x_n$ (les coefficients de X). Cette interprétation sera très utile dans la suite. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Produit général des matrices

On définit finalement le produit AB d'une matrice A par une matrice B, lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (condition de compatibilité).

Définition 51. Soient n, p, q trois nombres entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, dont les lignes sont notées $L_1(A), \ldots, L_n(A)$, et soit $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, dont les colonnes sont notées $C_1(B), \ldots, C_q(B)$. Le **produit** AB est alors la matrice à n lignes et q colonnes définie par :

$$AB := \begin{pmatrix} L_1(A)C_1(B) & \cdots & L_1(A)C_q(B) \\ \vdots & & \vdots \\ L_n(A)C_1(B) & \cdots & L_n(A)C_q(B) \end{pmatrix} \in M_{n,q}(\mathbb{R}).$$

Le coefficient $(AB)_{i,k}$ est donc le produit de la i-ème ligne de A par la k-ème colonne de B :

$$(AB)_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}.$$

La figure 3.1 montre le produit d'une matrice A de type 4×2 par une matrice B de type 2×3. Cette disposition en diagonale des matrices A et B peut être utile pour débuter :

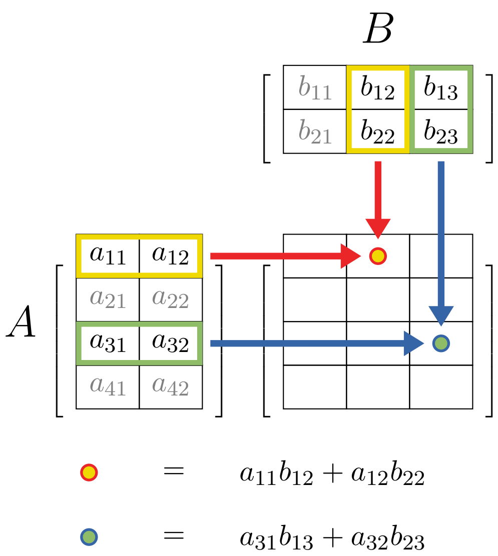

FIGURE 3.1 – Produit d'une matrice 4×2 par une matrice 2×3

Exemple. ✎

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Propriétés du produit matriciel

Le produit matriciel vérifie des propriétés analogues à celles du produit des nombres réels. En supposant que tous les produits sont définis, on montre facilement :

(i) $A(BC) = (AB)C$.
(ii) $A(B + C) = AB + AC$.
(iii) $(B + C)A = BA + CA$.
(iv) $(\lambda AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
(v) $0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.
(vi) $A0 = 0$
(vii) $0A = 0$

De plus, si A est de taille $n \times p$ alors :

$$I_n A = A \qquad \text{et} \qquad AI_p = A.$$

⚠ Mais attention, certaines règles de calcul « usuelles » ne sont pas vraies pour les matrices, en tout cas pas sans hypothèses supplémentaires. Par exemple :

- En général, on a $AB \neq BA$ même si les deux produits sont définis et donnent des matrices de même taille.
- On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- De l'égalité $AB = AC$, on ne peut pas déduire $B = C$.

Exemple. ✎ Calculer $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

Exemple. ✎ Calculer le produit $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

Exemple. ✎ Calculer AB et AC pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

3.5 Matrices et systèmes linéaires

Un système linéaire de p équations à n inconnues s'écrit matriciellement sous la forme $AX = B$, où A est la matrice des coefficients du système, X est le vecteur-colonne des inconnues, et B est le vecteur-colonne des seconds membres.

Par exemple, le système suivant en x, y, z

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4t = 22 \end{cases} \tag{3.6}$$

s'écrit matriciellement sous la forme $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 \\ 5 & -10 & -5 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 22 \end{bmatrix}}_{B} \tag{3.7}$$

Ceci revient aussi à écrire :

$$x\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-5\\-7\\-10\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-4\\-5\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\\22\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

De manière générale, un système linéaire de p équations à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n=b_p\end{cases} \tag{3.9}$$

s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pn}\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\b_p\end{bmatrix}}_{B} \tag{3.10}$$

ou encore, de manière équivalente :

$$x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\a_{p1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\ \vdots\\a_{pn}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\a_{pn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\b_p\end{bmatrix} \tag{3.11}$$

⚠ De cette dernière égalité, on voit que :

- Le système (3.9) possède une solution si et seulement si le vecteur-colonne B est combinaison linéaire des colonnes de la matrice A. En particulier, si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^p$ alors le système possède une solution, quel que soit le choix de B.
- Si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, alors le système possède au plus une solution.
- Si les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^p$, alors le système possède une unique solution.

3.6 Matrices carrées

Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice qui est de type $n \times n$. On note $M_n(\mathbb{R})$ plutôt que $M_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées dordre n. Par exemple :

$$\begin{bmatrix}0&4&-3\\1&5&2\\-1&0&1\end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$$

La **diagonale** d'une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ est constituée des coefficients a_{ii} pour $i = 1, \dots, n$. Par exemple, la diagonale de la matrice précédente est constituée des nombres 0, 5 et 1. Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients situés en dehors de la diagonale sont tous nuls. Par exemple, la matrice suivante est diagonale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

On utilise parfois la notation $\operatorname{diag}(1, 2, 3)$ pour désigner cette matrice. Des matrices carrées particulièrement importantes sont les **matrices identité** $I_n \in M_n(\mathbb{R})$, définies pour chaque entier $n \geq 1$ par :

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) est une matrice carrée dont les coefficients situés en dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale sont tous nuls. Par exemple :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}$$

3.6.1 Puissances d'une matrice carrée

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors tous les produits $A^2 := A \times A$, $A^3 := A \times A \times A$, etc. sont définis. Plus généralement, on définit la puissance k-ème de A par :

$$A^k := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} \tag{3.12}$$

Un problème important est de savoir calculer les puissances d'une matrice donnée (voir le chapitre sur la réduction). Pour les matrices diagonales, c'est facile : on montre sans difficulté par récurrence que $[\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)]^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Exemple. On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On montre facilement par récurrence que $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.6.2 Déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre (un scalaire) qui, en particulier, permet de savoir si la matrice est inversible ou non. Le programme du concours se limite au déterminant des matrices 2×2 et 3×3.

Définition 52. Le **déterminant** d'une matrice 2×2 est donné par :

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc \tag{3.13}$$

Le **déterminant** d'une matrice 3×3 est donné par :

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} := aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \tag{3.14}$$

⚠ **Interprétation géométrique pour les matrices** 2×2 Considérons les colonnes de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

comme des vecteurs $u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^2$. Alors :

- Si u et v sont colinéaires, le déterminant de A est nul.
- Si u et v ne sont pas colinéaires, ils déterminent un parallélogramme du plan, dont l'aire est égale à la valeur absolue de $\det(A)$. En particulier, $\det(A) \neq 0$.

Exemple. ✎ Calculer et faire un dessin :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

⚠ **Interprétation géométrique pour les matrices** 3×3 Considérons les colonnes de la matrice

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

comme des vecteurs $u = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}$ et $w = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$. Alors :

- Si u, v, w sont coplanaires [(2)], le déterminant de A est nul.
- Si u, v, w ne sont pas coplanaires, ils déterminent un parallélépipède de l'espace, dont le volume est égal à la valeur absolue de $\det(A)$. En particulier, $\det(A) \neq 0$.

(2). ⚠ u, v, w sont coplanaires si et seulement si ils forment une *famille liée*.

Exemple. Calculer :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pour certaines matrices de forme particulière, le déterminant peut se calculer « à vue d'œil ».

Proposition 53. Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier d'une matrice diagonale, est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration. ✎ Vérification directe sur la définition. □

Par exemple :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

⚠ En particulier, le déterminant de la matrice identité (de taille quelconque) vaut 1 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \qquad \text{et} \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Proposition 54. Soient A, B deux matrices carrées de même taille. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. ✎✎ □

⚠ Par conséquent, on a $\det(AB) = \det(BA)$ même si les matrices AB et BA sont différentes.

3.6.3 Matrices inversibles

Définition 55. Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est **inversible** s'il existe une matrice carrée B de même taille telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

On voit facilement qu'il ne peut exister qu'une seule matrice B qui vérifie la condition de la définition : si $AB = AB' = BA = B'A = I_n$, alors $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B$. D'où la définition suivante :

Définition 56. Si A de taille $n \times n$ est inversible, alors sa **matrice inverse**, notée A^{-1}, est l'unique matrice telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

En fait, on peut démontrer que, pour deux matrices A, B carrées $n \times n$, on a $AB = I_n$ si et seulement si $BA = I_n$ (ce qui n'est pas évident, car en général les produits AB et BA ne sont pas égaux). Donc, pour montrer que A est inversible et que son inverse est B, il suffit de montrer que $AB = I_n$, ou que $BA = I_n$.

Exemple. La matrice identité I_n est inversible et égale à son inverse, puisque $I_n \times I_n = I_n$.

Exemple. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 + A = I_n$. Alors $A(A + I_n) = I_n$, donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = A + I_n$.

Proposition 57.
1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A et B sont inversibles de même taille, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $AB = AC$ et si A est inversible, alors $B = C$. De même, si $BA = CA$ et si A est inversible, alors $B = C$.

Démonstration. $\square$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_k$ sont inversibles, alors le produit $A_1 \cdots A_k$ est inversible et $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k \cdots A_1$.

Le déterminant fournit un moyen très rapide pour savoir si une matrice est inversible ou non, sans avoir à calculer l'inverse :

Théorème 58. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. $\square$

Exemple. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ est inversible, car son déterminant n'est pas nul.

3.6.4 Détermination pratique de l'inverse

Inversion d'une matrice 2×2 D'après ce que l'on vient de voir, une matrice $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ est inversible si et seulement si son déterminant $ad - bc$ n'est pas nul. Dans ce cas on a la formule utile :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Exemple. Inverser la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Inversion d'une matrice carrée de taille quelconque Il existe plusieurs méthodes pour inverser une matrice carrée (3). Une technique simple est de résoudre le système linéaire associé à la matrice :

$$AX = Y \xrightarrow[\text{résolution}]{} X = A^{-1}Y$$

> **Proposition 59.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que
>
> $$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad AX = Y \Longleftrightarrow X = BY,$$
>
> où X et Y sont vus comme des vecteurs-colonne. Si tel est le cas, alors $B = A^{-1}$.

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. On lui associe le système linéaire

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = a \\ 2x + y \phantom{{}+z} = b \\ 3x + 2y + z = c \end{cases}$$

dans lequel x, y, z sont les inconnues et a, b, c sont des paramètres. La résolution de ce système montre qu'il possède une unique solution quels que soient a, b, c, et que cette solution est donnée par $x = a - c$, $y = -2a + b + 2c$ et $z = a - 2b$. Autrement dit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{Y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{Y}$$

Donc A est inversible, et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(3). Que l'on suppose évidemment inversible...

3.7 Transposée

Définition 60. Soit A une matrice de type $n \times p$. La **transposée** de A est la matrice de type $p \times n$, notée ${}^tA$, définie par :

$$({}^tA)_{i,j} := A_{j,i} \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \forall\, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Proposition 61.

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
5. Si A est carrée, alors $\det({}^tA) = \det(A)$.
6. Si A est inversible, alors $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration. ✎✎ □

Définition 62. Une matrice carrée A est :

- **symétrique** si ${}^tA = A$.
- **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

Par exemple, la matrice de gauche est symétrique et celle de droite est antisymétrique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément tous nuls.

3.8 Exercices

Exercice 26. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 27 (ENSAB oral 2008)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 28 (ENSAB oral 2006)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. En déduire qu'il existe deux suites de nombres (a_k) et (b_k) telles que $M^k = a_k I_3 + b_k M$ pour tout entier $k \geq 1$. Exprimer a_k, b_k puis M^k explicitement en fonction de k.

Exercice 29. On pose $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(M - aI_3)(M - bI_3)$ soit la matrice nulle. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}.

Exercice 30. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 31 (extrait de ENSAB 2008)**.** On donne une matrice A qui dépend du paramètre réel a :

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 2a-3 & a-1 \end{pmatrix}$$

Que vaut son déterminant ? Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ? Calculer dans ce dernier cas l'inverse A^{-1} de A.

Exercice 32 (extrait et adapté de ENSAB 2016)**.** On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.

1. Calculer, lorsque cela est possible, les produits matriciels suivants : BC, ${}^tDB$, ${}^tCA$, B^2, DB, A^2, ${}^tCAC$, CD. Si certains calculs ne sont pas possibles, les identifier et justifier.
2. B est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 33 (ENSAB oral 2010)**.** On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Établir l'existence de deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier $n \geq 1$:
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. En déduire une écriture explicite de A^n.

4 Applications linéaires

4.1 Applications linéaires de E dans F

Soient E, F deux espaces vectoriels.

Définition 63. Une application $f : E \to F$ est **linéaire** si, quels que soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque.

1. Il revient au même de dire que f est linéaire si $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ quels que soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Plus généralement, si $f : E \to F$ est linéaire, alors l'image par f d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : quels que soient $u_1, \ldots, u_k \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, on a [1]

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda f(u_1) + \cdots + \lambda_k f(u_k).$$

3. ⚠ Une application linéaire $f : E \to F$ vérifie toujours $f(0_E) = 0_F$, car $f(0_E) = f(0_\mathbb{R} 0_E) = 0_\mathbb{R} f(0_E) = 0_F$.

Exemple. ✎ L'application $E \to F$ qui à tout vecteur $u \in E$ associe le vecteur nul 0_F est clairement linéaire. On l'appelle **l'application nulle** de E dans F.

Exemple. ✎ On vérifie facilement que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$ est linéaire. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Exemple. ✎ L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) := xy$ n'est pas linéaire.

Le cas où $E = F$ est fréquent et possède une définition particulière :

Définition 64. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire $f : E \to E$. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exemple. ✎ L'application $E \to E$ qui à tout vecteur $u \in E$ associe u lui-même, est clairement linéaire. Elle est appelée **application identité** de E, et est notée id_E.

Exemple. ✎ L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

(1). par récurrence sur $k \geq 2$.

4.2 Comment se donner une application linéaire ?

La définition « application linéaire » permet de *vérifier* qu'une application donnée est linéaire. Mais comment en *construire* ? Le résultat suivant y répond : se donner une application linéaire $E \to F$ revient à se donner une base de E et, pour chaque vecteur de cette base, un vecteur de F. Précisément :

Proposition 65. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E, et soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de F. Il existe alors une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n$.

Démonstration. ✎ □

Voyons pourquoi cela est vrai sur l'exemple d'un sujet de concours.

Exemple (concours ENSAB 2013)**.** L'énoncé commence ainsi :

> On note (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2) les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(e_1) = e'_1 + 2e'_2$, $f(e_2) = 2e'_1 + 4e'_2$, $f(e_3) = e'_1 - 4e'_2$

Voyons pourquoi cela détermine totalement $f(x, y, z)$ pour n'importe quel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, on doit avoir par linéarité :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(e'_1 + 2e'_2) + y(2e'_1 + 4e'_2) + z(e'_1 - 4e'_2) \\ &= (x + 2y + z)e'_1 + (2x + 4y - 4z)e'_2 \\ &= (x + 2y + z, 2x + 4y - 4z), \end{aligned}$$

Par exemple, $f(1, 1, 1) = 4e'_1 + 2e'_2 = (4, 2)$. Pour terminer, il reste à montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) := (x + 2y + z, 2x + 4y - 4z)$ est bien linéaire, ce que l'on fait en revenant à la définition.

© Les sujets de concours ne demandent généralement pas de démontrer que l'application ainsi définie est linéaire. Typiquement, l'extrait de ENSAB2013 de l'exemple précédent *affirme* l'existence et l'unicité de f ; la suite du sujet en étudie des propriétés.

Une conséquence de ce qui précède est que l'on connaît la forme de toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$:

Proposition 66. ⚠ Les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sont les applications de la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n)$$

où les coefficients a_{ij} sont des nombres réels fixés.

Démonstration. ✎ □

⚠ Chacune des p composantes de $f(x_1, \dots, x_n)$ est une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.

Exemple. Voyons-le lorsque $n = 3$ et $p = 2$ (on ne fait que généraliser ce qu'on a vu dans l'exemple précédent). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linéaire. On pose $(a, b) := f(1, 0, 0)$, $(c, d) := f(0, 1, 0)$ et $(e, f) := f(0, 0, 1)$. Alors, comme plus haut, on doit avoir

$$f(x, y, z) = (ax + cy + ez, bx + dy + fz),$$

ce qui est bien de la forme annoncée. Réciproquement, on montre facilement, en revenant à la définition, que toute application f qui est de cette forme est bien linéaire.

4.3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

On vient de voir que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est de la forme :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n) \tag{4.1}$$

On rassemble les nombres a_{ij} en une matrice A à p lignes et n colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

La traduction matricielle de (4.1) est alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{bmatrix}}_{Y} \tag{4.3}$$

Autrement dit :

$$f(x) = y \quad \iff \quad AX = Y,$$

où X et Y sont les vecteurs-colonne correspondant à $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ respectivement.

> **Définition 67.** Avec les notations ci-dessus, on dit que $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire **canoniquement associée** à la matrice $A \in M_{np}(\mathbb{R})$, et que A est la **matrice** de f **dans les bases canoniques.** [a]
>
> ---
> *a.* On verra plus loin ce que signifie « matrice d'une application linéaire dans des bases » pour

d'autres bases que les bases canoniques.

On écrit parfois $f = f_A$ pour rappeler à quelle matrice f est associée.

⚠ Les vecteurs-colonne de la matrice A sont les images par f des vecteurs de la base canonique, écrits en colonnes. Par exemple pour la première colonne de A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

ce qui équivaut à $f(1, 0 \ldots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$.

Exemple. L'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ est donnée par $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x - y + z)$. Matriciellement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} x + 3z \\ 2x - y + z \end{bmatrix}}_{Y} \tag{4.5}$$

On a $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, ce qui correspond bien au fait que $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ est la première colonne de A. De même pour les deux autres colonnes.

Exemple (ENSAB2013 suite)**.** Par définition, f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (2, 4)$ et $f(0, 0, 1) = (1, -4)$. En écrivant les trois vecteurs-images en colonnes, on obtient la matrice de f dans les bases canoniques :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

On vient de répondre à la première question du sujet...

4.4 Exemples d'applications linéaires

4.4.1 Homothéties

Définition 68. Soit E un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'**homothétie** de E de rapport λ est l'endomorphisme $h_\lambda : E \to E$ donné par $f(x) := \lambda x$ pour tout $x \in E$.

✎ ⊕ Il s'agit bien d'une application linéaire, et sa matrice dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$, où $n = \dim(E)$.

⚠ L'homothétie de rapport 0 est l'application nulle, l'homothétie de rapport 1 est l'identité.

Exemple. L'homothétie de $\mathbb{R}^2$ de rapport 3 s'écrit $(x, y) \mapsto (3x, 3y)$. Sa matrice dans la base canonique (et plus généralement dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^2$) est $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4.4.2 Projections et projecteurs

© Les projections ne sont pas explicitement au programme du concours, mais elles y sont mentionnées...

De manière générale, on se place dans un espace vectoriel E décomposé en somme directe $E = F \oplus G$. On sait qu'alors tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Avec ces notations, la **projection** de E **sur** F **parallèlement à** G est l'application p définie par

$$p \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x_F + x_G & \mapsto & x_F \end{array}$$

Exemple. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, décomposé en $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ où $F = \mathrm{Vect}(1, 0)$ et $G = \mathrm{Vect}(0, 1)$. La décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est simplement $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$. La projection de $\mathbb{R}^2$ sur F (l'axe des abscisses) parallèlement à G (l'axe des ordonnées) est donc $(x, y) \mapsto (x, 0)$.

Exemple. ✎ Prenons $E = \mathbb{R}^2$, décomposé cette fois en $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ où $F = \mathrm{Vect}(1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(1, -1)$. La décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est $(x, y) = (?, ?) + (?, ?)$. La projection de $\mathbb{R}^2$ sur F parallèlement à G est donc $(x, y) \mapsto (?, ?)$. Faire un dessin.

Un **projecteur** de E est un endomorphisme p de E qui vérifie la relation $p \circ p = p$. Il est clair qu'une projection est un projecteur : toujours avec les mêmes notations, on a $p(x_F + x_G) = x_F$ donc $p \circ p(x_F + x_G) = p(x_F) = p(x_F + 0_E) = x_F$. Réciproquement, on peut montrer (✎✎) que tout projecteur p est une projection de E sur $F := \mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $G := \mathrm{Im}(p)$.

4.4.3 Symétries et involutions

On se place encore dans un espace vectoriel E décomposé en somme directe $E = F \oplus G$. On garde les mêmes notations : tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. La **symétrie** de E **par rapport à** F **parallèlement à** G est l'application s définie par

$$s \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x_F + x_G & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

Exemple. ✎ Prenons $E = \mathbb{R}^2$, décomposé en $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ où $F = \mathrm{Vect}(1, 0)$ et $G = \mathrm{Vect}(0, 1)$. La symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à F (l'axe des abscisses) parallèlement à G (l'axe des ordonnées) est $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Exemple. ✎ Prenons $E = \mathbb{R}^2$, décomposé cette fois en $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ où $F = \mathrm{Vect}(1,1)$ et $G = \mathrm{Vect}(1,-1)$. La décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est $(x,y) = (?,?) + (?,?)$. La symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à F parallèlement à G est donc $(x,y) \mapsto (?,?)$. Faire un dessin.

On montre facilement que les symétries sont des involutions : elles vérifient $s \circ s = s$. Réciproquement (✎✎) on montre que toute involution s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

4.5 Image et surjectivité

Définition 69. Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. On appelle **image** de ϕ et on note $\mathrm{Im}(\phi)$ l'ensemble des éléments de F qui possèdent un antécédent par ϕ :

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{y \in F \mid \exists\, x \in E, y = \phi(x)\}. \tag{4.6}$$

⚠ Attention à bien distinguer les deux utilisations du mot « image » :

- l'image par ϕ d'un élément particulier de E est *un* vecteur de F ;
- l'image de ϕ est un *ensemble* de vecteurs de F.

Proposition 70. Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Alors :

1. $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, ou plus généralement une famille génératrice de E, alors $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\phi)$.

Démonstration. ✎ □

© Un cas particulier important, utile pour les sujets de concours, est abordé dans le corollaire et l'exemple qui suivent :

Corollaire 71. Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, et soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ l'application linéaire canoniquement associée. Alors $\mathrm{Im}(\phi)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ qui est engendré par les vecteurs-colonne de A.

Exemple. Considérons la matrice $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ et soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire canoniquement associée. Le corollaire précédent dit que

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \tag{4.7}$$

Voyons, sur cet exemple, pourquoi ceci est vrai. On sait que $\phi(x,y,z) = (x+3z, 2x-y+z)$. Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ appartient donc à l'image de ϕ si et seulement s'il est de la forme

$(x+3z, 2x-y+z)$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$. Or $(x+3z, 2x-y+z) = x(1,2) + y(0,-1) + z(3,1)$, donc l'image de ϕ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(1,2)$, $(0,-1)$ et $(3,1)$. Autrement dit :

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}((1,2),(0,-1),(3,1)). \tag{4.8}$$

C'est précisément ce que dit (4.7) en notation matricielle, en identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec des vecteurs-colonne à 2 lignes.

Proposition 72. Une application linéaire $\phi : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(\phi) = F$.

⚠ Cet énoncé est une évidence : une application $\phi : E \to F$, qu'elle soit linéaire ou non, est *par définition* surjective si et seulement si tout élément $y \in F$ possède un antécédent par ϕ. Le fait que ϕ soit linéaire donne des outils supplémentaires pour en étudier la surjectivité. En particulier, puisque $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de F :

$$\phi : E \to F \text{ est surjective} \iff \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim F. \tag{4.9}$$

Exemple (suite)**.** L'application ϕ de l'exemple précédent est surjective, puisque $\mathrm{Im}(\phi)$ est engendrée par trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, dont par exemple les deux premiers ne sont pas colinéaires, d'où $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ et par conséquent $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}^2$.

4.6 Noyau et injectivité

Définition 73. Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de ϕ et on note $\mathrm{Ker}(\phi)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'envoient sur le vecteur nul :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in E \mid \phi(x) = 0_F\}. \tag{4.10}$$

⚠ On a toujours $0_E \in \mathrm{Ker}(\phi)$, puisque $\phi(0_E) = 0_F$ pour une application linéaire. Le fait qu'il y ait ou non d'autres vecteurs dans le noyau est relié à l'injectivité de ϕ :

Proposition 74. Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire.

1. $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. ϕ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_E\}$.

Démonstration. ✎ □

Exemple (ENSAB2013 suite)**.** On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+4y-z)$. Alors (x,y,z) appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $(x+2y+z, 2x+4y-z) = (0,0)$, ce qui équivaut à un système linéaire homogène de deux équations à trois inconnues. On trouve $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(-2, 1, 0)$, ce qui est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'application f n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit à $0_{\mathbb{R}^3}$. Par exemple, on a $f(-2, 1, 0) = f(0, 0, 0) = (0, 0)$. Deux vecteurs différents ont la même image, cela signifie précisément que f n'est pas injective.

On énonce un petit résultat dont le corollaire est important :

Proposition 75. Si $\Phi : E \to F$ est injective et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, alors $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$ est une famille libre de vecteurs de F.

Démonstration. ✎ □

Corollaire 76. Si $\phi : E \to F$ est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$. [a]

[a] On suppose que E et F sont de dimension finie.

Démonstration. ✎ □

4.7 Opérations sur les applications linéaires

Théorème et Définition 77. Soient E, F des espaces vectoriels, soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- l'application $f+g : E \to F$ définie par $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ est également linéaire ;
- l'application $\lambda f : E \to F$ définie par $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ est également linéaire.

Muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. ✎ Vérification directe des définitions. □

Proposition 78. Soient E, F, G des espaces vectoriels et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. Alors la composée $g \circ f : F \to H$ est également linéaire.

Démonstration. ✎ Vérifiction directe. □

On rappelle que $g \circ f$ est définie par :

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad \forall x \in E$$

4.8 Isomorphismes et automorphismes

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Définition 79. Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire bijective $f : E \to F$. Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E sur lui-même.

Remarque. Une application linéaire bijective est aussi appelée **inversible**, comme pour les matrices (on va voir que c'est tout à fait cohérent).

⚠ On rappelle que, par définition, : $E \to F$ est bijective si tout élément de F possède un et un seul antécédent par f (cela revient donc à dire que f est à la fois surjective et injective). Toute application bijective $f : E \to F$ possède une **application réciproque** $f^{-1} : F \to E$: à $y \in F$ on associe son unique antécédent par f. On a donc l'équivalence :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \tag{4.11}$$

On montre facilement que l'application réciproque f^{-1} d'un isomorphisme $f : E \to F$ est également linéaire. On dit que f^{-1} est l'**isomorphisme réciproque**, ou encore l'**inverse**, de f. Dire que f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre, c'est dire que :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F\,.$$

Proposition 80. Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$. [a]

[a] On suppose que E et F sont de dimension finie.

Démonstration. ✎✎ □

Supposons à présent que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, et soit A sa matrice canoniquement associée. La réciproque f^{-1} est également un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, avec une matrice canoniquement associée B. Quel est le rapport entre A et B ? Observons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f(x) = y & \Longleftrightarrow & x = f^{-1}(y) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ AX = Y & \Longleftrightarrow & X = BY \end{array}$$

La ligne du bas est une équivalence car c'est la composée des trois autres équivalences. Mais dire que $AX = Y \Leftrightarrow X = BY$ revient à dire, comme on l'a vu plus haut, que A est inversible et que B est son inverse. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 81. Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soit f_A son endomorphisme canoniquement associé. Alors :

1. A est inversible si et seulement si f_A est un automorphisme.
2. Si A est inversible, alors A^{-1} est la matrice canoniquement associée à ${f_A}^{-1}$.

Exemple. ✎ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par $f(x, y) = (2x + 5y, x + 3y)$. Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1}.

4.9 Théorème du rang

Le mot « rang » est utilisé dans plusieurs situations en algèbre linéaire :

Définition 82.
- Le **rang d'une famille de vecteurs** $(u_1, \dots, u_k)$ de E est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent :

$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) := \dim \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

- Le **rang d'une application linéaire** $\phi : E \to F$ est la dimension de l'image de ϕ :

$$\mathrm{rg}(\phi) := \dim(\mathrm{Im}(\phi)).$$

- Le **rang d'une matrice** est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs-colonne.

Ces trois notions sont reliées de la manière suivante :

- Si $\phi : E \to F$ est linéaire et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\phi)$, et par conséquent :

$$\mathrm{rg}(\phi) = \mathrm{rg}(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)).$$

- Si A est une matrice $p \times n$, et si $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est l'application linéaire canoniquement associée à A, alors les colonnes de A engendrent l'image de ϕ_A, et par conséquent :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\phi_A).$$

⚠ © Le résultat suivant est fondamental. Il relie le noyau et l'image d'une application linéaire, à travers leur dimension.

Théorème 83. Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. [a] Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\phi)).$$

a. On suppose que E et F sont de dimension finie.

Démonstration. ✎✎ □

Exemple (ENSAB2013 suite)**.** ✎ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = e'_1 + 2e'_2$, $f(e_2) = 2e'_1 + 4e'_2$ et $f(e_3) = e'_1 - 4e'_2$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e'_1, e'_2) est celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. En utilisant le théorème du rang, que vous énoncerez, déterminer le rang de f puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Corollaire 84. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces *de même dimension*[a]. Alors il y a équivalence entre :

- f est injective.
- f est surjective.
- f est bijective.

a. C'est en particulier le cas si $E = F$, autrement dit pour un *endomorphisme* f.

Démonstration. ✎ □

4.10 Exercices

Exercice 34. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non.

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$.
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y + 1) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f_4 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - z, x + y + z) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 35. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 1)$. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 36. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Déterminer $f^2 = f \circ f$, puis $f^3 = f \circ f \circ f$, puis f^4, f^5, f^6.
2. En déduire la forme générale de f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37. On pose $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y - z = 0\}$ et $G := \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(v)$ et $s(v)$, où p désigne la projection de E sur F parallèlement à G, et s désigne la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 38. On considère les applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + 3y + z)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z) = (x + 2y, y, x + z)$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = x + y + z$.
4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $k(x, y) = (x, y, x + y)$.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image pour chacune des applications. Vérifier le théorème du rang.
2. Déterminer les applications $f + g$ et $h \circ g$.

3. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et déterminer g^{-1}.

Exercice 39. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est bijectif. Donner la matrice dans la base canonique de sa bijection réciproque.

5 Représentations matricielles

5.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E, alors tout vecteur $v \in E$ se décompose de manière unique sous la forme

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \tag{5.1}$$

avec $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Avec ces notations :

Définition 85. La **matrice du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$** est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

⚠ Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ est la base canonique, la matrice d'un vecteur est simplement le vecteur-colonne constitué des composantes de ce vecteur.

Exemple. Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$. La décomposition du vecteur $(2, 1)$ dans $\mathcal{B}_0$ est simplement $(2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$, donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(2, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mais si on considère à présent la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (2, 1))$, alors le même vecteur $(2, 1)$ se décompose différemment : $(2, 1) = 0(1, 1) + 1(2, 1)$. Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $v_1, \dots, v_k$ sont des vecteurs de E, alors la **matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille** $v_1, \dots, v_k$ est construite en juxtaposant les vecteurs-colonne de chacun des v_j dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_k) := \Big[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1) \quad | \quad \cdots \quad | \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_k)\Big] \tag{5.2}$$

⚠ Le plus souvent, on s'intéresse au cas où il y a autant de vecteurs v_j que la dimension de E, ce qui fait que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_k)$ est carrée. Le résultat suivant est bien utile :

Proposition 86. Soit $\mathcal{B}$ est une base de E et soit $v_1, \ldots, v_n$ une famille de n vecteurs de E, où $n = \dim(E)$. Alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ est inversible.

Démonstration. ✎ Considérer l'endomorphisme $f : E \to E$ tel que $f(e_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. □

5.3 Matrice de passage d'une base à une autre

On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E.

Définition 87. La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ définie par :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) \tag{5.3}$$

⚠ La notation « $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ » n'est pas universelle : certains écrivent les bases dans l'ordre opposé, ou en indice et exposant, etc.

Exemple. Soient $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2))$ et $\mathcal{B}' = ((2,-1),(-3,2))$. Il s'agit bien de bases de $\mathbb{R}^2$ car chacune est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Une résolution de système montre que :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$$

Proposition 88. La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Démonstration. ✎✎ □

Exemple. On continue l'exemple précédent. La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ trouvée est bien inversible (son déterminant n'est pas nul). La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donc son inverse :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = {P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Vérifions-le : on a effectivement

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

⚠ © Dans de nombreux cas, et particulièrement dans les épreuves du concours, l'une des bases est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La situation est alors plus simple :

Proposition 89. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_0$ est la base canonique, alors la matrice $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ s'obtient en écrivant successivement les vecteurs de $\mathcal{B}$ sous forme de vecteurs-colonne.

Exemple. Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{B} = ((1,2,1),(-1,1,1),(0,1,1))$ est une autre base (1) de $\mathbb{R}^3$. On obtient la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ en écrivant « verticalement » les vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En effet, on a par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage dans l'autre sens $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ est l'inverse de P. Après calcul, on trouve :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

L'effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur est donné par le résultat suivant.

Proposition 90. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et soit $v \in E$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v). \tag{5.4}$$

Exemple. On considère la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi que la base $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2))$. On voit facilement que $(2,1) = 3(1,1) - (1,2)$, et par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(2,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2,1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

D'autre part, comme on l'a vu plus haut, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ s'écrit à vue :

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1). Une manière de montrer que c'est une base est d'ailleurs de montrer que la matrice de passage est bien inversible, par exemple en montrant que son déterminant n'est pas nul.

On vérifie que l'on a effectivement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v) = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$:

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

5.4 Matrice d'une application linéaire dans des bases

On considère une application linéaire $f : E \to F$. On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F.

Définition 91. La matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_n)). \tag{5.5}$$

⚠ Bien noter l'ordre dans lequel on écrit les bases en indice dans « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ » : la base de l'espace de départ à droite, la base de l'espace d'arrivée à gauche.

⚠ ⚠ Comme pour les matrices de passage, cette convention d'écriture n'est pas universelle.

© Un cas particulièrement simple est celui où on écrit la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *dans les bases canoniques*. Voici deux exemples caractéristiques :

Exemple. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et (e'_1, e'_2, e'_3) celle de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $f(e_1) = e'_1 + e'_3$, $f(e_2) = -2e'_1 + e'_2 + 3e'_3$. Alors la matrice de f dans les bases canoniques est :

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y - z)$. Alors la matrice de f dans les bases canoniques est :

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

En effet, on a par exemple $f(1, 0, 0) = (2, -1) = 2(1, 0) - 1(0, 1)$, d'où la première colonne de la matrice de f.

Proposition 92. Soient $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, et v un vecteur de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(v)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v). \tag{5.6}$$

Démonstration. ✎✎ Il suffit de le vérifier pour les vecteurs v de la base $\mathcal{B}$. □

5.5 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Les opérations sur les applications linéaires (addition, multiplication par un scalaire, composition) vues dans la section 4.7 correspondent aux opérations matricielles (addition, multiplication par un scalaire, multiplication des matrices).

On considère des espaces vectoriels E, F, G et on se donne une base $\mathcal{B}$ de E, une base $\mathcal{C}$ de F et une base $\mathcal{D}$ de G.

Addition, produit par un scalaire

Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 93. Avec ces notations, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$$

Composition

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ des applications linéaires :

$$E \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$$

Proposition 94. Avec ces notations, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(g)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \tag{5.7}$$

⚠ On voit que le produit des matrices correspond à la composition des applications linéaires.

Exemple. ✎ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Calculer A^2.
3. Donner une formule pour l'application linéaire $f^2 = f \circ f$, c'est-à-dire $f^2(x, y) = \dots$.

Matrice de l'inverse d'une application linéaire

Si $f : E \to F$ est une application linéaire inversible (un isomorphisme), on sait que $f^{-1} : F \to E$ est également linéaire (inversible).

Proposition 95. Si $f : E \to F$ est inversible, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^{-1}$$

5.6 Matrice d'un endomorphisme dans une base

Lorsque l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes, on peut utiliser la même base pour les deux. On obtient ainsi la notion de matrice d'un endomorphisme dans *une* base.

Définition 96. Soient E un espace vectoriel, $f \in L(E)$ un endomorphisme de E, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La **matrice** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ **de** f **dans la base** $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Exemple. Soit E de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_1 + e_3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⚠ © Le cas où l'espace vectoriel est $E = \mathbb{R}^n$, muni de la base canonique, est le plus fréquent en début d'énoncé. On retrouve bien la notion de « matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques » qui a été vue dans le chapitre « Applications linéaires ».

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = (x+y-z, -2x+3y+z, 4x-y+2z)$. La matrice de f dans la base canonique est alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La formule qui définit f peut se voir matriciellement comme :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Théorème 97. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme, et soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) &= P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ &= (P_{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Démonstration. ✎✎ □

Définition 98. Deux matrices carrées $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Comme on vient de le voir, les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.

Proposition 99. Si $B = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors $B^k = P^{-1}A^kP$.

Démonstration. ✎ □

5.7 Matrice d'un endomorphisme dans une « bonne » base

Donnons un exemple simple de cette situation, qui sera le thème central du chapitre suivant sur la réduction.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, -1)$ et on note f la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G. On montre (✎) que la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

.

✎ En prenant $u = (?, ?, ?)$, $v = (?, ?, ?)$ et $w = (?, ?, ?)$ de sorte que (u, v) soit une base de F et que w soit une base de G

- pourquoi la famille (u, v, w) est-elle automatiquement une base de $\mathbb{R}^3$?
- quelle est la matrice de f dans la base (u, v, w) ?

6 Réduction

On parle de « réduction » à la fois pour les matrices et pour les endomorphismes.

6.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

On se place dans un espace vectoriel E et on considère un endomorphisme f de E.

Définition 100. Une **valeur propre** de f est un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe un vecteur *non nul* $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est dit **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

⚠ Un vecteur propre est différent de 0_E par définition. En effet, le vecteur nul vérifie $f(0_E) = \lambda 0_E$ pour tout scalaire λ, donc l'autoriser dans la définition reviendrait à dire que tout scalaire est valeur propre... En revanche, le scalaire 0 peut très bien être valeur propre : *dire que 0 est valeur propre de f revient à dire que f n'est pas injective.* ✎

Proposition et Définition 101. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f. L'ensemble $E_\lambda := \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le **sous-espace propre** de f pour la valeur propre λ.

Exemple. ✎ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$.

1. Calculer $f(1, 1)$. En déduire une valeur propre de f. Déterminer le sous-espace propre associé.
2. Montrer que -1 est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé.
3. Former une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de f. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ?

Proposition 102. Si λ et μ sont deux valeurs propres différentes de f, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0_E\}$.

Démonstration. ✎ □

⚠ En fait, on a un résultat plus général, pas explicitement au programme mais dont on reparlera plus loin :

Proposition 103. Des sous-espaces propres associés à des valeurs valeurs propres différentes sont en somme directe.

Démonstration. ✎✎ □

Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On l'identifie à son application linéaire canoniquement associée, c'est-à-dire qu'on voit A comme l'application linéaire :

$$A \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

où les éléments X de $\mathbb{R}^n$ sont vus comme vecteurs-colonne. Une valeur propre de A est donc un scalaire λ pour lequel il existe un vecteur-colonne *non nul* X tel que $AX = \lambda X$. Un tel X est appelé vecteur propre de A pour la valeur propre λ. Le sous-espace propre associé est alors :

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\}.$$

Exemple. ✎ Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. On pose $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $X' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer AX. En déduire une valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé.
2. Calculer AX'. En déduire une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé.

⚠ Les résultats annoncés pour les endomorphismes sont encore vrais pour les matrices.

6.2 Recherche des valeurs propres : polynôme caractéristique

© Le programme du concours se limite à la détermination des valeurs propres et vecteurs propres en dimension 2 ou 3.

Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 2$ ou $n = 3$.

Définition 104. Le **polynôme caractéristique** P_A de la matrice A est la fonction définie par $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$.

⚠ La fonction $P_A(\lambda)$ est effectivement un polynôme de degré n en λ (voir les exemples plus loin).

Théorème 105. Les racines[a] du polynôme caractéristique P_A sont les valeurs propres de la matrice A.

a. Les racines d'un polynôme $P(\lambda)$ sont les valeurs λ pour lesquelles $P(\lambda) = 0$.

Démonstration. ✎ Dire que λ est valeur propre de A revient à dire que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. □

Exemple. ✎ Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, on trouve $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$; il s'agit bien d'un polynôme de degré 2. Ses racines sont $\lambda = 3$ et $\lambda = -1$. Ce sont bien les valeurs propres qu'on a observées plus haut.

Exemple. Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, on trouve $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$; il s'agit bien d'un polynôme de degré 3. Ses racines sont $\lambda = 1$ (racine évidente) et $\lambda = 4$.[(1)] Ce sont bien les valeurs propres qu'on a observées plus haut.

⚠ Pour trouver les racines d'un polynôme caractéristique de degré 3, essayer de profiter d'une factorisation au cours du calcul, ou bien chercher des racines évidentes (comme 0, ± 1...) et « factoriser par les racines ».

Cas des matrices triangulaires ⚠

Il s'agit d'un cas particulier important. *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire, en particulier d'une matrice diagonale, sont ses coefficients diagonaux.*[(2)] Voyons-le sur des exemples, le cas général étant le même :

- Les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sont 2 et -1. En effet, le polynôme caractéristique est
$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda),$$
et ses racines[(3)] sont bien 2 et -1.
- Les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ sont 1 et 4. En effet, le polynôme caractéristique

(1). Sachant que $\lambda = 1$ est racine, on peut « factoriser par $\lambda - 1$ ». ✎ On obtient $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\cdots)$ avec dans la dernière parenthèse un polynôme de degré 2, dont on sait trouver les racines...

(2). Ceci vient du fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux.

(3). ⚠ Ne jamais développer un polynôme déjà factorisé quand on cherche ses racines !

est

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda),$$

et ses racines (4) sont bien 1 et 4.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On affirme que le polynôme caractéristique de la matrice de f dans n'importe quelle base de E est toujours le même : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E et si on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, on sait que $B = P^{-1}AP$ pour une matrice inversible P. Par conséquent :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

Définition 106. Le **polynôme caractéristique** d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans n'importe quelle base de E.

© Souvent, $E = \mathbb{R}^n$ et on prend la base canonique. Ou alors f est *déjà* donnée par sa matrice A (voir plus haut).

Exemple. ✎ On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(e_1) = e_1 + 2e_2$, $f(e_2) = 2e_1 + 4e_2$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. En déduire les valeurs propres de f.

6.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Théorème et Définition 107. Pour un endomorphisme $f : E \to E$, il y a équivalence entre :

- il existe une base de E constituée de vecteurs propres ;
- il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Si tel est le cas, on dit que f est **diagonalisable**.

Démonstration. ✎ Revenir à la définition de « matrice d'un endomorphisme dans une base ». □

(4). ⚠ Ne jamais développer un polynôme déjà factorisé quand on cherche ses racines !

Théorème et Définition 108. Pour une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$, il y a équivalence entre :

- l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable ;
- il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Si tel est le cas, on dit que A est **diagonalisable**.

Démonstration. ✎ Voir P comme matrice de passage de la base canonique à une éventuelle base constituée de vecteurs propres. □

Exemple. ✎ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. On vérifie que les valeurs propres de A (donc de f) sont 3 et 5.
2. On montre que $(1, -2)$ est une base de E_3, et que $(1, -1)$ est une base de E_5.
3. $(((1, -2), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de f. La matrice de f dans cette base est :
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
L'endomorphisme f est donc diagonalisable.
4. La *matrice de passage* de la base canonique à la base de vecteurs propres est $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. On vérifie que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Exemple. ✎ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. La matrice A est triangulaire, donc $\lambda = 1$ est la seule valeur propre.
2. Le sous-espace propre E_1 est de dimension 1, engendré par $(1, 0)$.
3. Il n'existe pas de base de E constituée de vecteurs propres. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable.

Exemple. ✎ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. On vérifie que les valeurs propres de A (donc de f) sont 1 et 4, et que :
   - $((-1,0,1),(0,-1,1))$ est une base de E_1 ;
   - $(1,1,1)$ est une base de E_4.
2. On a $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(E_1) + \dim(E_4)$, donc f est diagonalisable.
3. La famille $((-1,0,1),(0,-1,1)),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et la matrice de f dans cette base est :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
4. La matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres est $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. On vérifie que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

6.4 Matrices diagonalisables

Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, il suffit de compter les dimensions :

Théorème 109. ⚠ Un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si la dimension de E est égale à la somme des dimensions des sous-espaces propres.

Démonstration. ✎ Revoir la section sur les sous-espaces supplémentaires. □

En particulier, on a une *condition suffisante* de diagonalisabilité :

Théorème 110. Si un endomorphisme de E possède n valeurs propres, où $n = \dim(E)$, alors cet endomorphisme est diagonalisable.

Démonstration. ✎ Les sous-espaces propres sont de dimension au moins 1... □

⚠ Si $\mathcal{B}$ est une base constituée de vecteurs propres, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale, avec une diagonale constituée des valeurs propres prises dans l'ordre des vecteurs propres et répétées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

6.5 Six résultats au programme (avec commentaires)

Propriétés des sous-espaces propres

Le programme du concours mentionne deux résultats (reliés) à connaître :

- *Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*
- *Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Plus précisément :

Théorème 111. Soit f un endomorphisme[a] de E. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de f, deux à deux distinctes.

1. Soient $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs de E tels que x_i est vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i pour chaque $i = 1, \dots, k$. Alors la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est libre.
2. Soient $\mathcal{B}_1$ une base de E_{λ_1}, $\mathcal{B}_2$ une base de E_{λ_2}, etc. jusqu'à $\mathcal{B}_k$ une base de E_{λ_k}. Alors la famille $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \dots, \mathcal{B}_k)$, obtenue en juxtaposant les vecteurs des différentes bases, est une famille libre.

a. De même pour une matrice.

Démonstration. ✎✎ □

⚠ En fait, le « vrai » résultat est : *les sous-espaces propres sont en somme directe.* Les deux résultats ci-dessus en sont des conséquences.

Caractérisation de la diagonalisabilité

Théorème 112. Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de la matrice.

Démonstration. ✎ Appliquer le résultat sur les bases mentionné plus haut. □

⚠ © C'est un résultat très utile, en particulier pour le concours : une fois les valeurs propres puis les sous-espaces propres déterminés, il suffit de compter les dimensions pour savoir si la matrice (ou l'endomorphisme) est diagonalisable.

Une condition suffisante de diagonalisabilité

Théorème 113. En dimension trois, une matrice ayant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Démonstration. ✎ Conséquence du résultat précédent. □

⚠ En fait c'est général : toute matrice carrée d'ordre n qui possède n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

⚠ Il n'est pas nécessaire qu'il y ait n valeurs propres pour que la matrice soit diagonalisable (penser à l'identité).

Matrices symétriques

Théorème 114. Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable.

Démonstration. ✎✎ □

Par exemple, on sait a priori que la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ est diagonalisable, puisqu'elle est symétrique.

Valeurs propres complexes

Théorème 115. Toute matrice carrée à coefficients réels admet au moins une valeur propre complexe.

On a vu ce qu'est une valeur propre réelle pour une matrice A. Mais qu'est-ce qu'une « valeur propre complexe » ?

- On sait que les racines du polynôme caractéristique P_A sont les valeurs propres de la matrice A.
- On dit qu'un nombre complexe λ est **valeur propre complexe** de A s'il existe un vecteur-colonne *complexe* X non nul tel que $AX = \lambda X$.
- Les valeurs propres (réelles et complexes) de A sont exactement les racines (réelles et complexes) du polynôme caractéristique P_A.
- Or tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauss). C'est pourquoi *toute matrice carrée à coefficients réels admet au moins une valeur propre complexe.*

Remarque. Si on se limite aux matrices d'ordre 2 ou 3, on peut être plus précis :

- toute matrice réelle d'ordre 2 possède ou bien deux valeurs propres réelles distinctes, ou bien une seule valeur propre réelle « double », ou bien deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées ;
- toute matrice réelle d'ordre 3 possède au moins une valeur propre réelle. (5)

Exemple. ✎ Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

(5). Car tout polynôme réel de degré 3 doit s'annuler quelque part : regarder les limites en $\pm\infty$ et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Montrer que $\pm i$ sont les valeurs propres de A.
3. Trouver un vecteur colonne complexe X tel que $AX = iX$. En déduire un vecteur colonne complexe Y tel que $AX = -iY$ (idée : $-i$ est le conjugué de i...)
4. A partir de X et Y, construire une matrice inversible complexe P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

6.6 Synthèse

Pour déterminer si un endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ou une matrice A d'ordre n est diagonalisable, et si oui la diagonaliser :

1. Dans le cas d'un endomorphisme f, commencer par écrire sa matrice A dans une base (par exemple la base canonique pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$).
2. Calculer le polynôme caractéristique de A, puis chercher les racines de ce polynôme : ce sont les valeurs propres de la matrice ou de l'endomorphisme.
3. S'il y a n valeurs propres distinctes, en conclure que la matrice ou l'endomorphisme est diagonalisable.
4. Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre associé.
5. Faire la somme des dimensions des sous-espaces propres : si elle vaut n alors A (ou f) est diagonalisable, sinon elle (il) ne l'est pas.
6. Pour diagonaliser un endomorphisme : former une base de $\mathbb{R}^n$ en juxtaposant des bases des sous-espaces propres ; écrire la matrice de f dans cette base : c'est une matrice diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale.
7. Pour diagonaliser une matrice : former une matrice carrée P en juxtaposant les vecteurs-colonne des bases des sous-espaces propres ; inverser cette matrice P, puis écrire $P^{-1}AP$: c'est une matrice diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale.

6.7 Applications de la diagonalisabilité

6.7.1 Calcul de la puissance k-ème d'une matrice carrée

Les puissances d'une matrice diagonale sont simples à calculer : on montre facilement (par récurrence sur k) que $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$$

Voyons sur un exemple comment on détermine les puissances d'une matrice diagonalisable. On montre que les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

sont 5 et 3. Après calcul des vecteurs propres, on trouve une matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

telle que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. On en déduit que $A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$, puis par récurrence que $A^k = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^k P^{-1}$. Après calcul de P^{-1}, on trouve :

$$A^k = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 5^k & 2 \cdot 3^k - 5^k \end{bmatrix}$$

6.7.2 Systèmes différentiels

Voir ENSAB 2014 pour un exemple.

6.8 Exercices : sujets de concours 2008-2018

⚠ Voici les exercices d'algèbre linéaire des épreuves de concours de 2008 à 2018, par années décroissantes. Les notations et formulations ont été respectées dans la mesure du possible.

Exercice 40 (ENSAB 2019)**.** Le plan vectoriel E est rapporté à une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère f_m, l'endomorphisme de E défini par :

$$f_m(\vec{\imath}) = m\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$
$$f_m(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + m\vec{\jmath}$$

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note A_m la matrice de f_m dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a) Donner A_m.
   b) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est bijective (inversible).
2. Déterminer le noyau et l'image de f_m lorsque f_m n'est pas bijectif.
3. Donner les valeurs propres de la matrice A_{-1} et les sous-espaces propres associés.
4. La matrice A_{-1} est-elle diagonalisable ? Justifier.

Exercice 41 (ENSAB 2018)**.** Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice M_t par

$$M_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 1-t & 0 & t \\ 0 & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout réel t, 0 est valeur propre de M_t.

2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{R}$ des nombres réels t tels que M_t est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres réels t tels que M_t est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice 42 (ENSAB 2017)**.** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. La matrice M est-elle inversible ?
3. Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de M.
4. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 43 (ENSB 2016)**.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on note f l'endomorphisme défini par $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$, $f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. On donne :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ${}^tD$ est la transposée de D.
   Calculer, lorsque cela est possible, les produits matriciels suivants :

$$BC \ ; \ {}^tDB \ ; \ {}^tCA \ ; \ B^2 \ ; \ DB \ ; \ A^2 \ ; \ {}^tCAC \ ; \ CD$$

   Si certains calcules ne sont pas possibles, les identifier et justifier.
3. B est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
4. A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Exercice 44 (ENSAB 2015)**.** Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, et qu'un point M du plan a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On considère l'application linéaire f qui à tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ associe le vecteur $f(\vec{u})$ de coordonnées

$$(\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y \ ; \ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y)$$

Toujours dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit A la matrice de f.

1. Donner la matrice A.
2. Calculer son déterminant. A est-elle inversible ?
3. Cette matrice admet-elle des valeurs propres réelles ?

   Soit A_0 un point du plan de coordonnées $(x; y)$, $A_0 \neq (0, 0)$ et $\overrightarrow{u_0}$ le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$. Soit $\overrightarrow{u_1} = f(\overrightarrow{u_0})$ et A_1 le point du plan défini par $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{u_1}$.

4. Montrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle.
5. Donner le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{0A_1})$.

Exercice 45 (ENSAB 2014)**.** On désigne par $(e_1; e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. L'endomorphisme u est-il bijectif ? Dans ce cas donner la matrice de sa bijection réciproque.
2. Déterminer une base $(v_1; v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice B de l'endomorphisme u soit de la forme suivante :
   $$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
3. Donner la (ou les) valeurs propres de u ainsi que le (ou les) sous-espaces propres associés. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
4. *Cette question est indépendante des précédentes.* On considère le système d'équations différentielles suivant :
   $$\begin{cases} x' &= -x + 3y \\ y' &= -3x + 5y \end{cases}$$
   Où x et y sont des fonctions du temps t, vérifiant les conditions initiales suivantes : pour $t = 0$, $x(0) = -2$ et $y(0) = 1$.
   a) On pose $z = x - y$. Montrer que z vérifie l'équation différentielle $z' = 2z$ avec la condition initiale $z(0) = 1$.
   b) Donner l'expression de z en fonction du temps.
   c) En déduire celles de x et de y.

Exercice 46 (ENSAB 2013)**.** 1. **Première partie.** On note (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2) les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(e_1) = e'_1 + 2e'_2, \quad f(e_2) = 2e'_1 + 4e'_2, \quad f(e_3) = e'_1 - 4e'_2$$

a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En utilisant le théorème du rang que vous énoncerez, déterminez le rang de f puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. **Deuxième partie.** Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé pour une matrice carrée.

b) Calculer le rang de g, en déduire sans calcul une valeur propre simple de g.

c) Vérifier que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de g.

d) Soient les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonaliser C et D. (Vous préciserez les valeurs propres et une base de chaque espace propre).

e) Vérifier que les valeurs propres obtenues sont les valeurs propres de la matrice A associées à des vecteurs propres du type : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 47 (ENSAB 2012)**.** Soit B une matrice $(3,3)$ à valeurs réelles, et I la matrice identité de taille $(3,3)$.

1. Simplifier les expressions suivantes : $(I - B + B^2)(I + B)$ et $(I + B)(I - B + B^2)$.
2. Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$. Calculer B^2 et B^3.
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
4. Donner les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ? Justifier.

Exercice 48 (ENSAB 2011)**.** 1. Soit a un nombre réel, et u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (1, -2, 0), \quad v = (1, a, 0), \quad w = (0, 0, 1)$$

Pour quelle valeurs [(6)] de a ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par
$$f(1,0,0) = u, \quad f(0,1,0) = v, \quad f(0,0,1) = w$$
   a) Donner la matrice (que l'on notera F) de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   b) Suivant les valeurs de a trouvées à la question précédente donner son rang, définir son espace image $\mathrm{Im}(f)$, et donner une base de son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ [(7)].
3. On suppose dans cette question que a vaut -3. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$g(u) = (1,0,1), \quad g(v) = (1,1,2), \quad g(w) = (2,1,3)$$
Donner la matrice, que l'on notera G, de g dans la base canonique, ainsi que son rang.

Exercice 49 (ENSAB 2010)**.** On donne les matrices suivantes :
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
où a, b, x, y sont des réels.

1. Pour quelles valeurs de b l'équation matricicelle $AX = B$ a-t-elle des solutions ? Donner ces solutions.
2. Donner le rang de la matrice A. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles cette matrice est inversible ?
3. Pour $a = 0$, donner les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 50. (ENSAB 2009) Soit a et b deux réels. On donne les matrices G, A, X, X' définies par :
$$G = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5+a & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & b \end{pmatrix}$$

(6). Erreur d'accord singulier/pluriel présente dans l'énoncé.

(7). Parfois il faut aussi se battre contre l'énoncé... Si vous trouvez que ce « dans la base canonique » final ne veut rien dire, ajoutez 1 point à votre moyenne semestrielle du module de biologie.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $X'X$, que l'on comparera à G. Pour quelles valeurs de a et b ces deux matrices sont-elles égales ?
2. Pour quelles valeurs de a la matrice G est-elle inversible ?
3. Calculer le rang de la matrice X. En déduire celui de la matrice A.
4. Pour $a = -10$, effectuer une diagonalisation de G. On donnera les valeurs propres de G ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 51 (ENSAB 2008)**.** On donne une matrice A qui dépend du paramètre réel a :

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 3 \\ 2a-3 & a-1 \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut son déterminant ?
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?
3. Calculer dans ce dernier cas l'inverse A^{-1} de A.
4. On prend $a = 12$. Quelles sont les valeurs propres de A ? Donner deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
5. Même question avec $a = 2$.
6. Pour $a = 1$, la matrice A a-t-elle encore des vecteurs propres (réels) ?

6.9 Pour aller plus loin

Voici des énoncés d'exercices posés à l'oral entre 2006 et 2011, tels qu'on les trouve sur le site du concours. Les

Exercice 52. (2011) Soit t un nombre réel et la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble de ces matrices quand t décrit $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si deux matrices appartiennent à E, leur produit est encore un élément de E.
2. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $A(t)$ est inversible. Montrer que dans ce cas $A(t)^{-1}$ appartient encore à E.

Exercice 53. (2010) On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Établir l'existence de deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. En déduire une expression explicite de A^n.

Exercice 54. (2010) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique. On note $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Soit v un vecteur propre de φ associé à la valeur propre 1. Trouver un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(w) = v + w$.
3. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Exercice 55. (2010) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. On cherche à résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation (E) : $M^2 = A$.
Démontrer que si M est solution de (E), alors A et M commutent et tout vecteur propre de A est vecteur propre de M.
3. En déduire que toute solution de (E) est diagonalisable et déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 56. (2010) Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les matrices H_m définies par $H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$. On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que 1 est valeur propre commune à tous les endomorphismes h_m. Chercher les sous-espace propre associés. Déterminer un vecteur propre v_1 commun à tous ces espaces.
2. On note $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de h_m dans cette base.
3. Pour quelles valeurs de m, h_m est-elle diagonalisable ?

Exercice 57. (2008) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & (n+2)/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer sans calculs que 1 et $1 + 1/n$ sont valeurs propres de A_n. A_n est-elle diagonalisable ? Inversible ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice produit $B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Inversible ? Si oui, déterminer B_n^{-1}.

Exercice 58. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. La matrice A est-elle inversible ? [Indication (8)]

Exercice 59. Soit n un entier ≥ 3 et a, b deux réels. On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice A.
2. Déterminer le noyau de A, sa dimension, et en donner une base.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 60. (2008) Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $f_1 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_2 : x \mapsto xe^{2x}$ deux fonctions de E. F est le sous-espace vectoriel de E engendré par f_1 et f_2 : $F = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$.

1. Démontrer que (f_1, f_2) est une base de F.
2. Soit ϕ définie par $\forall f \in E$, $\phi(f) = f'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice M dans la base (f_1, f_2). Calculer M^n.

Exercice 61. (2006) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$.
2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. En déduire qu'il existe deux suites (y_k) et (v_k) telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = u_k I_3 + v_k M$.
4. Exprimer u_k, v_k puis M^k explicitement en fonction de k.

(8). Évidemment, pour savoir si A est inversible, le plus simple serait de calculer le déterminant, mais ce n'est pas l'idée de l'exercice. Ici, on demande de calculer A^2 et d'observer. Vous devriez remarquer quelque chose en comparant A et A^2... Pourquoi cela permet-t-il de dire que A n'est pas inversible ?