Examen - session 2

CORRIGÉ

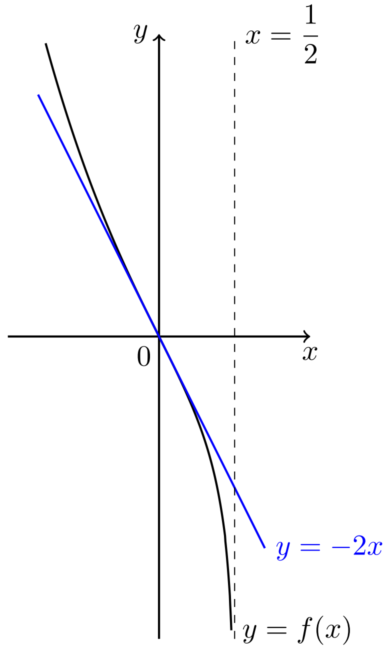
Exercice 1. *(4 points)*

(a) La fonction f est le produit de $x \mapsto e^{-x}$, fonction définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de $x \mapsto \ln(1+ax)$, fonction définie et C^∞ sur $\left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[$ si $a>0$, sur $\left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[$ si $a<0$.

(b) On a $ax \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}\ln(1+ax) \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\left(ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= ax - a\left(1+\frac{a}{2}\right)x^2 + a\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}\right)x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$

(c) Comme f est C^∞ en 0, on a d'après la formule de Taylor-Young et le DL ci-dessus :
$f''(0) = 0 \Leftrightarrow a\left(1+\frac{a}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -2$, et
$f^{(3)}(0) = 6a\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a^2}{3}\right) = a(3+3a+2a^2)$, donc $f^{(3)}(0) = 0$ si $a = 0$, $= -10$ si $a = -2$.
Donc 0 est un point d'inflexion de f si et seulement si $a = -2$.



Exercice 2. *(4,5 points)*

(a) Posons $y = 2x - 3x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \underset{y\to 0}{o}(y^4) \\ &= 1 + (2x-3x^2) + (2x-3x^2)^2 + (2x-3x^2)^3 + (2x-3x^2)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 1 + (2x-3x^2) + \left(4x^2 - 12x^3 + 9x^4\right) + \left(8x^3 - 36x^4\right) + 16x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 1 + 2x + x^2 - 4x^3 - 11x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4). \end{aligned}$$

(b) On a $f(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \dfrac{x^2}{3 - 2x + x^2} = \dfrac{g(x)}{x} = zg(x)$.

(c) On a $z = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le DL de la question (a), on a donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(z)}{z} \\ &= \frac{1}{z} + 2 + z + \underset{z\to 0}{o}(z) \\ &= x + 2 + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

(d) D'après le DL ci-dessus, $g(x) - (x+2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La droite d'équation $y = x + 2$ est donc asymptote au graphe de g en $+\infty$. De plus, $g(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ lorsque $x \to +\infty$. Le graphe de g est donc au-dessus de sa tangente au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. *(5,5 points)*

(a) Comme f est C^2 sur I, on a : $\exists c \in]x, x+\alpha[,\ f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \dfrac{\alpha^2}{2} f''(c)$.

(b) Soient $x \in I$ et $\alpha > 0$. La formule ci-dessus s'écrit : $f'(x) = \dfrac{1}{\alpha}\left(f(x+\alpha) - f(x) - \dfrac{\alpha^2}{2} f''(c)\right)$, d'où $|f'(x)| \leq \dfrac{|f(x+\alpha)| + |f(x)|}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{2}|f''(c)| \leq \dfrac{2M_0}{\alpha} + \dfrac{\alpha M_2}{2}$.

(c) Pour $\alpha = 1$ par exemple, d'après l'inégalité ci-dessus, f' est bornée sur I par $2M_0 + \dfrac{M_2}{2}$.

(d) Soient $x, y \in I$. Comme f est C^2 sur I, il existe, d'après le théorème des accroissements finis, c dans $]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$, et donc $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(c)| \leq M_1$.

C'est l'*inégalité des accroissements finis*.

(e) (i) Pour $f = \cos$, la borne supérieure de $|f' = -\sin|$ est égale à 1, d'où la formule.

(ii) Pour $f = \ln$, la borne supérieure de $|f'|$ sur $]E(x), x[$ est égale à $\dfrac{1}{E(x)}$.

Donc $|\ln(x) - \ln(E(x))| \leq \dfrac{x - E(x)}{E(x)} \leq \dfrac{1}{x-1}$.

(f) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\dfrac{2M_0}{x^2} + \dfrac{M_2}{2}$ et $g''(x) = \dfrac{4M_0}{x^3} > 0$, donc g admet un minimum en $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}} \Leftrightarrow g(x) = 2\sqrt{M_0 M_2}$. D'après la question (b), on a donc $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. Donc $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 4. *(6 points)*

I. (a) On raisonne par double implication.

Supposons que $c \in \mathcal{VA}(u_n)$, et posons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit φ une extraction de $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers c. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N',\ |u_{\varphi(n)} - c| \leq \varepsilon$. L'entier $n = \max\big(\varphi(N), \varphi(N')\big)$ vérifie bien $n \geq N$ et $|u_n - c| \leq \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - c| \leq \varepsilon$. Soit donc $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - c| \leq 1$, puis, par récurrence, soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k \geq n_{k-1} + 1$ tel que $|u_{n_k} - c| \leq \dfrac{1}{k}$. Posons alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) = n_k$. Par construction, φ est une extraction de $\mathbb{N}$, et la suite $(u_{\varphi(k)})$ converge vers c. Donc $c \in \mathcal{VA}(u_n)$.

(b) (i) Supposons que $c \notin \mathcal{VA}(u_n)$. D'après la question (a), il existe donc $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N,\ |u_n - c| > \varepsilon$, c'est-à-dire que soit $u_n > c + \varepsilon$, soit $u_n < c - \varepsilon$. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N',\ |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N'$, il est donc impossible d'avoir par exemple $u_n < c - \varepsilon$ et $u_{n+1} > c + \varepsilon$. Donc soit $\forall n \geq \max(N, N'),\ u_n < c - \varepsilon$, soit $\forall n \geq \max(N, N'),\ u_n > c + \varepsilon$. Dans le premier cas, il y a contradiction avec le fait que $b \in \mathcal{VA}(u_n)$, et de même dans le second cas pour a.

(ii) Dans ce cas, $a = \min \mathcal{VA}(u_n)$ et $b = \max \mathcal{VA}(u_n)$. Donc $\mathcal{VA}(u_n) = [a, b]$.

II. (a) (i) D'après 3.(e)(i), on a $|u_{n+1} - u_n| \leq |\ln(n+1) - \ln(n)| = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) D'après 3.(e)(ii), on a $|\ln(e^{2n\pi}) - \ln(\varphi_1(n))| \leq \dfrac{1}{e^{2n\pi} - 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après 3.(e)(i), on a donc $|\cos\big(\ln(e^{2n\pi})\big) - u_{\varphi_1(n)}| \leq |\ln(e^{2n\pi}) - \ln(\varphi_1(n))| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\cos\big(\ln(e^{2n\pi})\big) = 1$, donc $u_{\varphi_1(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De même, $u_{\varphi_2(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Comme (u_n) est bornée par 1, on a donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(b) D'après I.(b)(ii) et (a), on a $\mathcal{VA}(u_n) = [-1, 1]$.