Examen - session 2

(3h)

Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les résultats donnés dans l'énoncé peuvent être admis pour traiter les questions suivantes.
Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(4 points)*

Soient a un réel non nul et f la fonction définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+ax)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

(b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

(c) On dit que 0 est un *point d'inflexion* de f si $f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) \neq 0$. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles 0 est un point d'inflexion de f. Représenter graphiquement ce·s cas.

Exercice 2. *(4,5 points)*

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1-2x+3x^2}$.
Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de f en 0.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x^3}{3-2x+x^2}$. On pose $z = \dfrac{1}{x}$.
Montrer que $g(x) = \dfrac{f(z)}{z}$.

(c) En déduire que $g(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(d) En déduire que le graphe de g admet une droite asymptote en $+\infty$. Déterminer l'équation de cette droite, ainsi que la position du graphe par rapport à cette droite au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. *(5,5 points)*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f et f'' sont respectivement bornées par M_0 et M_2 sur I ; c'est-à-dire que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$.

(a) Soient $x \in I$ et $\alpha > 0$. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à f entre x et $x+\alpha$.

(b) En déduire que $\forall x \in I,\ \forall \alpha > 0,\ |f'(x)| \leq \dfrac{2M_0}{\alpha} + \dfrac{\alpha M_2}{2}$.

(c) En déduire que f' est bornée. On note M_1 la borne supérieure de $|f'|$ sur I.

(d) Montrer que $\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq M_1|x-y|$. Comment s'appelle cette inégalité ?

(e) En déduire les inégalités suivantes :

  (i) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$.

  (ii) $\forall x > 1,\ |\ln(x) - \ln(E(x))| \leq \dfrac{1}{x-1}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
  Indication : Prendre $I =]x-1, +\infty[$.

(f) En utilisant la question (b) et en étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{2M_0}{x} + \dfrac{xM_2}{2}$, montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 4. *(6 points)*

I. Soit (u_n) une suite réelle. On note $\mathcal{VA}(u_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

(a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $c \in \mathcal{VA}(u_n) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - c| \leq \varepsilon$.

(b) On suppose que $\mathcal{VA}(u_n)$ contient au moins deux réels a et b tels que $a < b$. On suppose de plus que $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(i) Soit $c \in \,]a, b[$. En utilisant la question (a), montrer par l'absurde que $c \in \mathcal{VA}(u_n)$.

(ii) Si $a = \liminf\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $b = \limsup\limits_{n \to +\infty} u_n$, en déduire $\mathcal{VA}(u_n)$.

II. On considère la suite de terme général $u_n = \cos(\ln(n))$.

(a) En utilisant les inégalités de la question (e) de l'exercice 3,

(i) montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) déterminer les limites des sous-suites de u_n extraites par $\varphi_1(n) = E\left(e^{2n\pi}\right)$ et par $\varphi_2(n) = E\left(e^{(2n+1)\pi}\right)$. En déduire $\liminf\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(b) En déduire $\mathcal{VA}(u_n)$.