Année 2017-2018
L2 — SV Concours
HLMA413 Mathématiques

ÉPREUVE ÉCRITE (17 MAI 2018)
(DURÉE : 1H30)

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La ***qualité de la rédaction et de la présentation*** *sera largement prise en compte dans la notation ; gardez à l'esprit que vous vous adressez à un lecteur, auquel vous expliquez votre démarche, votre raisonnement, vos calculs.*

Exercice 1. Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Exercice 2. On pose :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 3x + y + 3z - 2t = x + 2z - t = 0\} \quad (1)$$
$$G = \mathrm{Vect}((1,-5,-1,-6),(1,-1,1,0),(2,-4,1,-3)) \quad (2)$$
$$H = \mathrm{Vect}((1,1,2,3),(0,2,1,3)) \quad (3)$$

(1) Justifier brièvement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de F, puis la dimension de F.

(2) Justifier brièvement que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de G, puis la dimension de G.

(3) Écrire G comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

(4) Montrer que $G = H$.

(5) A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

(6) Montrer que $(-3,4,1,-1) \in F$ et $(3,-5,2,-3) \in G$, puis déterminer tous les vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $v + w = (0,-1,3,-4)$.

(7) Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la base de F obtenue à la question (1). Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la base de G obtenue à la question (2).

Exercice 3. (1) Rappeler la définition de « famille libre ».

(2) Dans un espace vectoriel E, on considère trois vecteurs u, v, w.

  (a) On suppose que la famille (u,v,w) est libre. Montrer qu'alors $(v+w, 2u-w, u-v)$ est également libre.

  (b) Réciproquement, on suppose que la famille $(v+w, 2u-w, u-v)$ est libre. Montrer qu'alors (u,v,w) est libre.

Solution succinte

1 On résout le système par la méthode du pivot. Les opérations élémentaires $E_1 \leftrightarrow E_3$, puis $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ et $E_3 \leftarrow E_3 - mE_1$, puis $E_3 \leftarrow E_3 + E_2$ amènent par exemple au système suivant :

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad mz = m^2 \\ \quad (m-1)y + \quad (1-m)z = m - m^2 \\ \quad\quad (2 - m - m^2)z = 1 + m - m^2 - m^3 \end{cases}$$

Dans ce nouveau système, la question est de savoir si les coefficients $m-1$ et $2-m-m^2$ sont nuls ou non. On remarque que $2 - m - m^2 = (1-m)(m+2)$, donc on voit que trois cas doivent être distingués :

Si $m = 1$**:** dans ce cas, les trois équations du système initial sont les mêmes, à savoir $x+y+z = 1$. L'ensemble des solutions est alors

$$\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

Si $m = -2$**:** dans ce cas, la dernière équation du nouveau système est $0 = -9$, donc le système n'a pas de solutions :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Si m **est différent de** 1 **et** -2**:** dans ce cas, le nouveau système est triangulaire. Il y a donc une unique solution. Après calcul et simplification :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1+m}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m}\right)\right\}$$

2 (1) F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en x, y, z, t, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver une base de F, on résout le système linéaire. On obtient par exemple :

$$F = \{(-2z + t, 3z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\},$$

et par conséquent $F = \mathrm{Vect}((-2, 3, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$. Les deux vecteurs $(-2, 3, 1, 0)$ et $(1, -1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille est libre, donc $((-2, 3, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$ est une base de F. Ainsi F est de dimension 2.

(2) Notons u, v, w les vecteurs qui engendrent G (dans l'ordre de l'énoncé). Par définition, la famille (u, v, w) engendre G, et la question est de savoir si elle est libre ou non. Pour cela, on détermine les nombres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Cette équation équivaut à un système linéaire homogène en α, β, γ ; on résout ce système, et on trouve qu'il possède des solutions non nulles. On obtient par exemple la relation :

$$u = -3v + 2w.$$

La famille (u, v, w) n'est donc pas libre, et $G = \mathrm{Vect}(v, w)$. Or (v, w) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, donc c'est une base de G, et ainsi $\dim(G) = 2$.

(3) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a vu dans la question précédente que G est engendré par v et w ; donc $(a, b, c, d) \in G$ si et seulement si il existe α, β, γ tels que

$$\alpha u + \beta v = (a, b, c, d).$$

Cette dernière équation est équivalente à un système de 4 équations en α, β, et on cherche une ou des conditions sur a, b, c, d pour que ce système soit compatible. On applique la méthode du pivot, et on obtient par exemple le système :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta & = a \\ \quad\;\; \beta & = a - c \\ \qquad\quad + 0 & = 3a + b - 2c \\ \qquad\quad + 0 & = 3a - 3c + d \end{cases}$$

On en déduit que le système initial est compatible si et seulement si les deux équations $0 = 3a + b - 2c$ et $0 = 3a - 3c + d$ sont vérifiées. Par conséquent :

$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 3a + b - 2c = 0, 3a - 3c + d = 0\}.$$

(4) On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Pour montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, il suffit donc de prouver que $F \cap G = 0$.

On peut prouver que $F \cap G = \{0\}$ de deux manières différentes :

— Soit en résolvant le système homogène de 4 équations à 4 inconnues obtenu en réunissant les deux équations définissant F avec les deux équations de G obtenues à la question précédente, et en montrant ce système a la solution nulle comme unique solution.

— Soit en prenant un vecteur de G, donc un vecteur de la forme $\alpha v + \beta w$, et en montrant que s'il vérifie les équations de F alors nécessairement $\alpha = \beta = 0$ et donc ce vecteur est nul.

(5) On observe que $(-3, 4, 1, -1)$ vérifie les équations qui définissent F, et que $(3, -5, 2, -3) = v+w$ (notations de la question 2), donc il appartient à G (autre méthode : observer qu'il vérifie les équations de G obtenues à la question 3). Ensuite, on constate que $(0, -1, 3, -4)$ est la somme de ces deux vecteurs. Or, dire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ revient à dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Il existe donc un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $v + w = (0, -1, 3, -4)$, ce sont les vecteurs donnés dans la question.

(6) La juxtaposition (concaténation) d'une base de F et d'une base de G donne une base de $\mathbb{R}^4$: c'est une propriété fondamentale du fait que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

3 (1) Question de cours.

(2) (a) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(v + w) + \beta(2u - w) + \gamma(u - v) = 0_E$. En regroupant, on obtient $(2\beta + \gamma)u + (\alpha - \gamma)v + (\alpha - \beta)w = 0_E$. Comme (u, v, w) est libre, cela implique que $2\beta + \gamma = \alpha - \gamma = \alpha - \beta = 0$. On résout ce petit système, et on montre que sa seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc $(v + w, 2u - w, u - v)$ est libre.

(b) On procède de la même manière.