Examen - session 1

CORRIGÉ

Exercice 1. *(5,5 points)*

(a) Soit (u_n) une suite réelle. Un réel ℓ est appelé valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

(b) Comme (u_n) est bornée, (v_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (v_n) admet donc une valeur d'adhérence.

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = u_n - \dfrac{2}{3}\ell + \dfrac{1}{2}\left(u_{2n} - \dfrac{2}{3}\ell\right) = a_n - \ell$. Donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Soit $c \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de (v_n). Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(v_{\varphi(n)})$ converge vers c. Comme (b_n) converge vers 0, $(b_{\varphi(n)})$ également. Donc $v_{2\varphi(n)} = 2\left(b_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2c$. Donc $-2c$ est valeur d'adhérence de (v_n).

(e) Par une récurrence immédiate, $\forall p \in \mathbb{N},\ (-2)^p c$ est valeur d'adhérence de (v_n). La suite (v_n) est bornée, donc l'ensemble de ses valeurs d'adhérences également. Or, si $c \neq 0$, alors la suite $((-2)^p c)_{p\in\mathbb{N}}$ est non-bornée. Il y a contradiction, donc $c = 0$.

(f) On vient de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de (v_n) bornée est réduit à $\{0\}$. Donc (v_n) converge (vers 0). Donc (u_n) converge $\left(\text{vers } \dfrac{2}{3}\ell\right)$.

Exercice 2. *(3,5 points)*

(a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, $(n+1)$-fois dérivable sur $]a,b[$.
Il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) (i) La formule de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre $n = 1$ entre $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{2}$ s'écrit :

$$\exists c_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{1}{2} + f''(c_1)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{f''(c_1)}{8}.$$

La formule de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre $n = 1$ entre $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{2}$ s'écrit :

$$\exists c_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + f''(c_2)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} = 1 + \frac{f''(c_2)}{8}.$$

(ii) D'après l'inégalité admise, $\max\left(\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|, \left|f\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1\right|\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

Donc $\max\left(\left|\dfrac{f''(c_1)}{8}\right|, \left|\dfrac{f''(c_2)}{8}\right|\right) \geq \dfrac{1}{2}$, donc $\max\left(\left|f''(c_1)\right|, \left|f''(c_2)\right|\right) \geq 4$. Donc soit $\left|f''(c_1)\right| \geq 4$, soit $\left|f''(c_2)\right| \geq 4$.

Exercice 3. *(4,5 points)*

(a) Posons $y = \cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Alors

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &= \ln(1+y) \\
&= y - \frac{y^2}{2} + \underset{y\to 0}{o}(y^2) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).
\end{aligned}$$

(b) On a $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos(x))\right)$.

Or $\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.

Posons donc $z = \dfrac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Alors

$$\begin{aligned}
\cos(x)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{z-\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}e^z \\
&= e^{-\frac{1}{2}}\left(1 + z + \underset{z\to 0}{o}(z)\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).
\end{aligned}$$

(c) D'après le DL ci-dessus, il est immédiat que $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) Comme $\dfrac{k}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a d'après la question précédente que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}}$. Par conséquent, $\cos\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{2n^2}{k}} = u_n^{2k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{2k} = e^{-k}$.

(e) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Alors $v_n - v_m = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2n^2}{k}}$,

donc $|v_n - v_m| \leq \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \left|\cos\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2n^2}{k}}\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} e^{-k} = e^{-(m+1)}\frac{1-e^{-(n-m)}}{1-e^{-1}} \leq \frac{e^{-(m+1)}}{1-e^{-1}}$.

Donc $\forall n \geq m,\ |v_n - v_m| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (v_n) est de Cauchy. Donc (v_n) est convergente.

Problème. *(6,5 points)*

I. (a) On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)} \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).
\end{aligned}$$

(b) (i) On a $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{f(x)^2} - 1\right)$.

Or, d'après la question précédente, $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$,

d'où $\dfrac{f(x)^2}{x^2} = \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2 = 1 - \dfrac{2x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$,

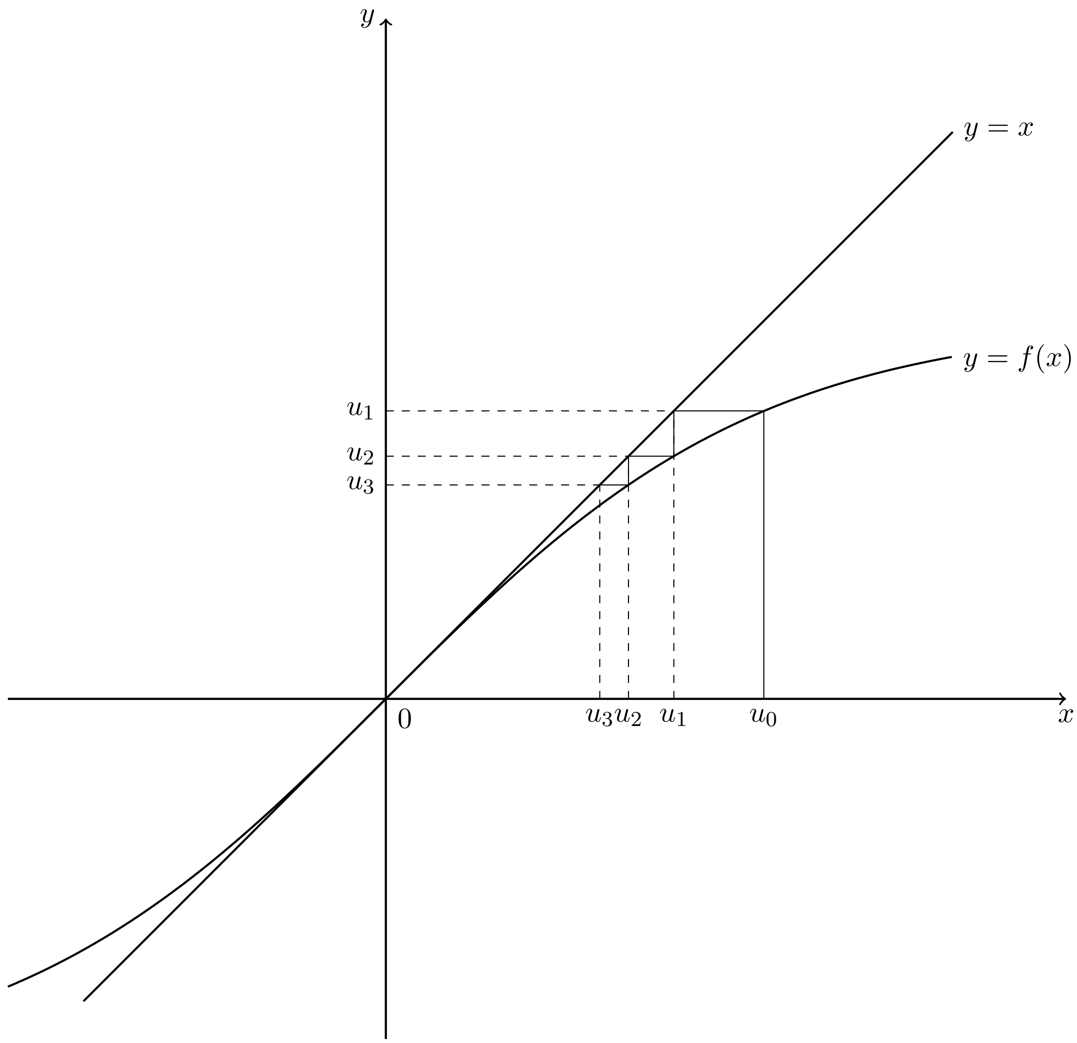
d'où $\dfrac{x^2}{f(x)^2} = 1 + \dfrac{2x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Donc $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(1)$, et donc $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$.

(ii) Le DL à l'ordre 1 de f en 0 est $f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. La tangente au graphe de f en 0 est donc $y = x$.

(iii) Comme $f(x) - x = -\dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, où $-\dfrac{x^3}{3} < 0$ si $x > 0$, > 0 si $x < 0$, le graphe de f est en-dessous de sa tangente à droite de 0 ; autrement dit : $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]0, \alpha[,\ f(x) < x$.

(c)



II. (a) La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$. L'intervalle $]0, +\infty[$ est donc stable par f. Comme $u_0 > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

(b) Supposons $u_0 \in \,]0, \alpha[$. D'après I.(b)(iii), $\forall x \in \,]0, \alpha[,\ f(x) < x$. Donc (u_n) est décroissante, et est de plus minorée par 0 d'après la question précédente. Elle converge donc vers $\ell \in [0, \alpha[$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de f ; or 0 est le seul point fixe de f, donc $\ell = 0$.

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{f(u_{n-1})^2} - \dfrac{1}{u_{n-1}^2}$. Comme $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question précédente, on a d'après I.(b)(i) que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$.

(d) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_1 + \ldots + v_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2}$, donc $\dfrac{v_1 + \ldots + v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nu_n^2}$. D'après le lemme de Cesàro, on a donc $\dfrac{1}{nu_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2n}}$.