Examen - session 1

(3h)

Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les résultats donnés dans l'énoncé peuvent être admis pour traiter les questions suivantes.
Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(5,5 points)*

(a) Donner la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite réelle.

(b) Soient (u_n) une suite réelle bornée et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}\ell$ admet une valeur d'adhérence.

On suppose désormais que la suite de terme général $a_n = u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}$ converge vers ℓ.

(c) Montrer que la suite de terme général $b_n = v_n + \dfrac{v_{2n}}{2}$ converge vers 0.

(d) En déduire que si $c \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite (v_n), alors $-2c$ l'est aussi.

(e) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N},\ (-2)^p c$ est une valeur d'adhérence de (v_n). En déduire par l'absurde que $c = 0$.

(f) En déduire que (v_n) est convergente, puis que (u_n) est convergente.

Exercice 2. *(3,5 points)*

(a) Énoncer la formule de Taylor-Lagrange (avec les hypothèses).

(b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$.

  (i) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à f, montrer qu'il existe $c_1 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{f''(c_1)}{8}$, et qu'il existe $c_2 \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ tel que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1 = \dfrac{f''(c_2)}{8}$.

  (ii) On admet l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \max(|x|, |x-1|) \geq \dfrac{1}{2}$. Déduire de la question précédente qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Exercice 3. *(4,5 points)*

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de $\ln(\cos(x))$ en 0.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0.

(c) En déduire que $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{n^2}{k^2}}$. En déduire que $\cos\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{2n^2}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-k}$.

(e) On admet que $\forall k \leq n,\ 0 \leq \cos\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{2n^2}{k}} \leq e^{-k}$. En déduire que la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{2n^2}{k}}$ est de Cauchy. Que peut-on en conclure ?

Problème. *(6,5 points)*

Soient $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ f(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

et (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

I. (a) Montrer que le développement limité à l'ordre 5 de f en 0 est donné par

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

(b) En déduire que

(i) $\displaystyle \frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$,

(ii) la droite d'équation $y = x$ est tangente au graphe de f en $x = 0$,

(iii) $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]0,\alpha[,\ f(x) < x$.

(c) Représenter sur un même dessin le graphe de f, sa tangente en $x = 0$ et les quatre premières valeurs de la suite (u_n) en prenant $u_0 = 1$.

II. *On utilise dans cette partie des résultats de la partie I.*

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

(b) Montrer que si $u_0 < \alpha$, alors (u_n) converge vers 0.

On suppose désormais que $u_0 \in]0,\alpha[$.

(c) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_{n-1}^2}$. Montrer que (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Déterminer ℓ.

(d) En appliquant le lemme de Cesàro (rappelé ci-dessous) à la suite (v_n), déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Lemme de Cesàro : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général $b_n = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ converge également vers ℓ.