Correction du DM (avril 2018)

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = z + t = 0\}$

$G = \mathrm{Vect}((1,0,m,2),(m,0,4,-4))$

(1) F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car c'est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$

La condition $2x-y+z=z+t=0$ <u>n'est pas</u> équivalente à $2x-y+z=z+t$ (on a perdu l'information que tout cela est égal à 0) et <u>n'est pas</u> équivalente à $2x-y+z+z+t=0$ (ce n'est pas parce que la somme de deux nombres est nulle que les deux nombres sont forcément nul)
(erreurs observées pendant la séance)

G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car c'est le sous-espace engendré par les vecteurs $(1,0,m,2)$ et $(m,0,4,-4)$, qui appartiennent à $\mathbb{R}^4$

(2) Pour déterminer la dimension de F, on construit une base de F, et pour cela on résout le système linéaire (en fait, ici il est déjà quasiment résolu...)

$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ \phantom{2x - y +{}} z + t = 0 \end{cases}$ ce système est échelonné, y et t sont variables libres

d'où $z = -t$ puis $2x = y - z = y + t$, soit $x = \dfrac{y+z}{2}$

Ainsi $F = \left\{ \left(\dfrac{y+z}{2}, y, -t, t\right) \in \mathbb{R}^4 ;\ y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 1, 0, 0\right), \left(\tfrac{1}{2}, 0, -1, 1\right)\right)$ ↓ on multiplie par 2 pour éliminer les fractions

$= \mathrm{Vect}\left((1,2,0,0),(1,0,-2,2)\right)$

(!) penser à vérifier que ces deux vecteurs vérifient bien les équations qui définissent F...

rem : on pouvait aussi paramétrer les solutions par x et t, ou par x et z ...

les vecteurs $(1,2,0,0)$ et $(1,0,-2,2)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre. Donc $((1,2,0,0),(1,0,-2,2))$ est une base de F, et par conséquent $\boxed{\dim F = 2}$

Par définition, la famille $((1,0,m,2),(m,0,4,-4))$ engendre G.
On se demande donc si ces deux vecteurs sont colinéaires ou non, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$. Aucun des deux n'étant nul, ils sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(m,0,4,-4) = \lambda(1,0,m,2)$.
le seul λ possible est $\lambda = -2$ (p.ex en regardant la dernière composante), et il convient pour les autres composantes si et seulement si $m = -2$
Par conséquent :

- si $m = -2$, alors $G = \mathrm{Vect}((1,0,-2,2))$ et $\dim G = 1$
- si $m \neq -2$, alors $((1,0,m,2),(m,0,4,-4))$ est une base de G et donc $\dim G = 2$

(3) On veut montrer que $G \subset F$ si et seulement si $m = -2$

- si $m = -2$, alors $G = \mathrm{Vect}((1,0,-2,2))$
  Or $(1,0,-2,2) \in F$ puisque $(1,0,-2,2)$ vérifie les deux équations qui définissent F.
  Donc $G \subset F$ (car G est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

qui contient le vecteur $(1,0,-2,2)$.

• **si $m \neq -2$**, alors $(1,0,m,2)$ ne vérifie pas l'équation $z+t=0$, donc n'appartient pas à F, donc $G \not\subset F$.

④ On sait que $F \oplus G = \mathbb{R}^4 \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\} \\ \dim F + \dim G = 4 \end{cases}$

Donc déjà : **si $m = -2$**, alors F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, puisqu'alors $\dim F + \dim G = 2+1 = 3$

Si $m \neq -2$, on a bien $\dim F + \dim G = 2+2 = 4$

et il reste à vérifier que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Pour cela, prenons un vecteur de G : il est de la forme

$$v = \alpha(1,0,m,2) + \beta(m,0,4,-4) \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

c-à-d $v = (\alpha + \beta m, 0, \alpha m + 4\beta, 2\alpha - 4\beta)$

Ce vecteur appartient également à F si et seulement si il vérifie les équations qui définissent F, c-à-d si et seulement si

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta m) - 0 + (\alpha m + 4\beta) = 0 \\ (\alpha m + 4\beta) + (2\alpha - 4\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2+m)\alpha + (2m+4)\beta = 0 \\ (m+2)\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{car } m \neq -2$$

$$\iff \begin{cases} (2m+4)\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{idem}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc $v = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, ce que l'on voulait démontrer.

Ainsi $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^4 \text{ si } m \neq -2}$