CC : Fonctions réelles

Corrigé

Exercice 1.

Posons $y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Comme $y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on pose $z = y - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors $z = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. De plus,

$$f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(2 + z) = \ln\left(2\left(1 + \frac{z}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{z}{2}\right),$$

et $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$, donc pour $t = \frac{z}{2} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{24} + \underset{z\to 0}{o}(z^3) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$

Comme f est de classe C^∞ en 0, la formule de Taylor-Young appliquée à f à l'ordre 3 en 0 nous donne $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 0$, d'où $f^{(3)}(0) = 0$.

Exercice 2.

(a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $(n + 1)$-fois dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in \,]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(a)\frac{(b - a)^2}{2} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b - a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

(b) La fonction sin étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor-Lagrange pour cette fonction entre $a = 0$ et $b = x > 0$, avec $n = 4$, s'écrit :

$$\exists c \in \,]0, x[,\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \sin^{(5)}(c)\frac{x^5}{120}.$$

Comme $\sin^{(5)} = \cos$ et que cette fonction est bornée par 1, on a donc :

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{x^5}{120}.$$

Pour $x = 0,2$: $\frac{x^5}{120} = \frac{2^5 \cdot 10^{-5}}{120} \leq 10^{-5}$,
donc, à 10^{-5} près, $\sin(0,2) \simeq 0,2 - \frac{0,2^3}{6} = \frac{149}{750}$.