CC : Suites réelles
Corrigé

Exercice 1.

(a) Comme sin est bornée par 1, on a $\forall n \in N^*, \dfrac{n^4}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^4}{n-1}$, donc $\dfrac{n^3}{1+\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \dfrac{n^3}{1-\frac{1}{n}}$. Comme les suites encadrantes tendent toutes deux vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) tend vers $+\infty$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(n) = n\ln(n)$. Donc $u_n \leq \dfrac{\ln n}{n}$, donc (u_n) converge vers 0 par croissances comparées.

Exercice 2. Non : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente, mais vérifie $|u_n| = 1$, donc $(|u_n|)$ converge.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) est non minorée, $\exists N \in \mathbb{N},\ u_N \leq A$. Comme (u_n) est décroissante, $\forall n \geq N,\ u_n \leq u_N$. Donc $\forall n \geq N,\ u_n \leq A$. Donc (u_n) tend vers $-\infty$.