Contrôle continu 2

CORRIGÉ

Exercice 1.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$. Alors, par inégalités triangulaires,
$|u_N - l + u_{N+1} - l + \ldots + u_n - l| \leq |u_N - l| + |u_{N+1} - l| + \ldots + |u_n - l| \leq (n - N + 1)\varepsilon$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ comme dans (a). On a
$u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nl = (u_1 + u_2 + \ldots u_{N-1} - (N-1)l) + (u_N - l + u_{N+1} - l + \ldots + u_n - l)$.
Par inégalité triangulaire, et d'après (a), on a donc
$|u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nl| \leq |u_1 + u_2 + \ldots u_{N-1} - (N-1)l| + (n - N + 1)\varepsilon$.
Donc $A = |u_1 + u_2 + \ldots u_{N-1} - (N-1)l|$ convient.

(c) La suite $\left(\dfrac{A}{n}\right)_{n \geq 1}$ tend classiquement vers 0, ce qui donne l'assertion voulue.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Soient N et N' donnés par (a) et (c). Alors $\forall n \geq \max(N, N')$,
$|v_n - l| = \dfrac{|u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nl|}{n} \leq \dfrac{A}{n} + \dfrac{n - N + 1}{n}\varepsilon \leq \dfrac{A}{n} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$.
Comme $\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ \varepsilon' = 2\varepsilon$, on a bien que (v_n) converge vers l.

Exercice 2.

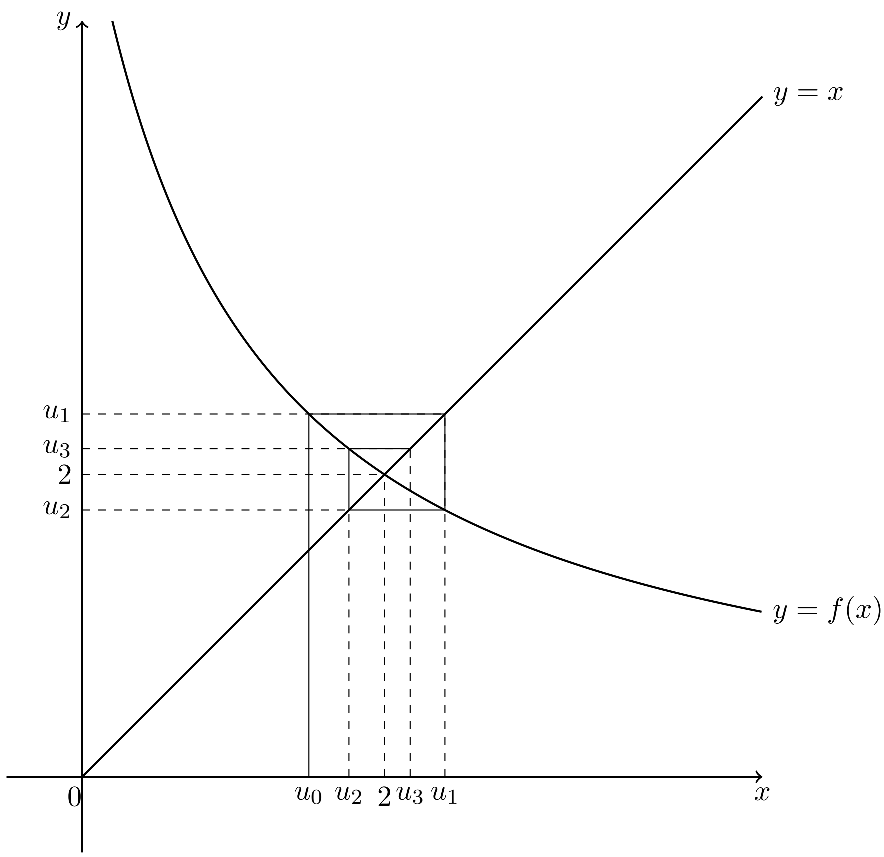
(a) Une suite (u_n) est *de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N,\ |u_m - u_n| \leq \varepsilon$.

(b) Soient $m \geq n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part
$\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m}\right) \text{ ou } \ldots - \dfrac{1}{m-1}\right) + \dfrac{1}{m} \geq 0$,
et d'autre part
$\dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) - \ldots - \left(\dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m}\right) \text{ ou } \ldots - \dfrac{1}{m-1}\right) - \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{n}$.

(c) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après (b),
$|u_m - u_n| = \left|\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{(-1)^m}{m}\right| \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
donc (u_n) est de Cauchy, donc convergente .
Remarque : On pouvait également faire appel aux suites adjacentes.

Exercice 3.

(a)



(b) La fonction f est classiquement décroissante sur $]-1, +\infty[$ et $f(x) = x \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, donc le seul point fixe de f sur $]-1, +\infty[$ est 2. Donc f échange les intervalles $]-1, 2[$ et $]2, +\infty[$, d'où le résultat.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = u_{2n+2} = f\left(f(u_{2n})\right) = f \circ f(v_n)$. Donc la suite (v_n) est récurrente pour la fonction $f \circ f$. Comme $v_0 = u_0 \in]-1, 2[$, intervalle stable par $f \circ f$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in]-1, 2[$. De plus, $\forall x \in]2, +\infty[,\ f \circ f(x) = \dfrac{6x+6}{x+7}$, donc $f \circ f(x) - x = -\dfrac{(x-2)(x+3)}{x+7} \geq 0$. Donc (v_n) est croissante.

(d) La suite $(u_{2n} = v_n)$ est croissante et majorée par 2, donc convergente vers $l \leq 2$. Comme $f \circ f$ est continue sur $]-1, +\infty[$, l est un point fixe de $f \circ f$. Donc $l = 2$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = f(v_n)$ et que f est continue en 2, (u_{2n+1}) converge également vers 2. Enfin, comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) partitionnent (u_n) (c'est-à-dire que $2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1) = \mathbb{N}$), (u_n) converge aussi vers 2.

(e) Si $u_0 = 2$, alors la suite (u_n) est constante égale à 2. Si $u_0 \in]2, +\infty[$, alors $u_1 \in]-1, 2[$ d'après (b), et on est donc ramené au cas déjà étudié. Dans tous les cas, (u_n) converge vers 2.