Feuille d'exercices 12

UTILISATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Déterminer la limite en 0 de

(a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$, (b) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$, (c) $\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}}$, (d) $\dfrac{1}{x^2}-\text{cotan}^2 x$.

Exercice 2. Déterminer la limite en 0 de

$$\frac{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}. \qquad \textit{Rappel :}\ \tan x = x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 3. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en x_0 des fonctions suivantes. Y a-t-il un extremum local en x_0 ?

(a) $\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{4}$ en $x_0=0$,

(b) $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0=0$,

(c) $\dfrac{3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)}{3x}$ en $x_0=0$,

(d) $x+2\sqrt{x}-\sqrt{3+x}$ en $x_0=1$,

(e) $\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ en $x_0=1$,

(f) x^α en $x_0>0$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4. Tracer sur un même dessin les graphes des fonctions $1+\sin x$, e^x, $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, et leurs tangentes en 0.

Exercice 5. Développements asymptotiques. Montrer que

(a) $x^{\frac14}\sqrt{1+\sqrt{x}} = x^{\frac14}+\dfrac{x^{\frac34}}{2}-\dfrac{x^{\frac54}}{8}+\dfrac{x^{\frac74}}{16}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$,

(b) $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8\sqrt{x}}+\dfrac{1}{16x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

(c) $\dfrac{1}{x+\ln x} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{\ln^2 x}{x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 6. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote de

(a) $\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$, (b) $(x^3+x^2+x+1)^{\frac13}$, (c) $\ln(e^{x^2}-e^x-1)$.

Exercice 7. Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x+\ln x$.

(a) Montrer que $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est une bijection continue croissante.

(b) Montrer que $f^{-1}(y)\underset{y\to+\infty}{\sim} y$.

(c) Montrer que $f^{-1}(y)=y-\ln y+\dfrac{\ln y}{y}+\underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)$.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 8 (La méthode de Newton de résolution d'équations)**.**

On se propose de résoudre numériquement l'équation $g(\ell) = 0$, où g est une fonction donnée et ℓ l'inconnue. L'idée est de donner une suite d'approximations de la solution qui converge le plus rapidement possible.

Première partie : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $f(\ell) = \ell$, f est dérivable en ℓ et $|f'(\ell)| < 1$. On dit que ℓ est un point fixe **attractif**. On considère une suite récurrente $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ et un voisinage U de ℓ tels que $\forall x \in U,\ |f'(x)| < \alpha$.

(b) En déduire que $\forall x, y \in U,\ |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$.

(c) Montrer que
$$x_0 \in U \implies \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leq \alpha^n |x_0 - \ell|.$$
En déduire que $|x_n - \ell| = \underset{n \to +\infty}{O}(\alpha^n)$.

(d) Expliquer la terminologie de « point fixe attractif ».

Deuxième partie : On suppose de plus que f est de classe C^2 et que $f'(\ell) = 0$. On dit que ℓ est un point fixe **super-attractif**.

(e) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 pour f sur l'intervalle $[\ell, x]$.

(f) En déduire qu'il existe V voisinage de ℓ et $K \geq 0$ tels que $\forall x \in V,\ |f(x) - \ell| \leq K|x - \ell|^2$.

(g) Montrer qu'il existe un voisinage W de ℓ et $\beta \in [0, 1[$ tels que :
$$x_0 \in W \implies \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leq \beta^{2^n}.$$

(h) Expliquer la terminologie de « point fixe super-attractif ».

Troisième partie : On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3, et on suppose que $g(\ell) = 0$ et $g'(\ell) \neq 0$. On considère la suite récurrente donnée par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$.

(i) On pose $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Montrer que x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente à f en x_n avec l'axe horizontal. Faire un dessin.

(j) Montrer que ℓ est un point fixe super-attractif de f.

(k) Montrer qu'il existe un voisinage W de ℓ et $\beta \in [0, 1[$ tels que $\forall x_0 \in W,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leq \beta^{2^n}$.

(l) Appliquer cette méthode, dite *de Newton*, à la fonction $g(x) = x^3 - 2$, avec $x_0 = 1$, pour trouver une approximation à 10^{-9} près de $\sqrt[3]{2}$.