UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L1 - ANALYSE 2 (HLMA202)
ANNÉE 2017-2018

Feuille d'exercices 11

OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. La fonction $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet-elle un DL_2 en 0 ? un DL_3 en 0 ? un DL_4 en 0 ?

Exercice 2. Montrer que la fonction $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un DL_1 en 0. Sa dérivée f' admet-elle un développement limité en 0 ?

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 3. Divisions de DL.

(a) Donner le DL_3 en 0 de $\dfrac{1+x}{2+x}$.

(b) Donner le DL_5 en 0 de $\tan(x)$.

(c) Donner le DL_3 en 0 de $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ (tangente hyperbolique).

(d) Donner le DL_4 en 0 de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$. En déduire le DL_3 en 0 de $\mathrm{cotan}(x) - \dfrac{1}{x}$.

Exercice 4. Compositions de DL.

(a) Donner le DL_4 en 0 de $\sqrt[3]{1+\cos x}$.

(b) Donner le DL_4 en 0 de $\ln(1+\sin x)$.

(c) Donner le DL_2 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$.

(d) Donner le DL_4 en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$.

Exercice 5. Intégrations de DL.

(a) Donner le DL_4 en 0 de $\ln(1+x)$.

(b) Donner le DL_5 en 0 de $\arctan(x)$.

(c) Donner le DL_5 en 0 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

(d) Donner le DL_5 en 0 de $\arccos(x)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$, et $g(0) = 0$. Montrer que $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

(b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(c) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et ses DL à tout ordre en 0.

(d) Existe-t-il une autre fonction ayant les mêmes DL à tout ordre que f ?

3 - Pour aller plus loin

Exercice 7. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x + \ln(1+x)$.

(a) Montrer que f est une bijection croissante de classe C^∞.

(b) On note $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-1, +\infty[$ sa fonction réciproque. Justifier que f^{-1} est de classe C^∞.

(c) Donner un DL_3 de f en 0.

(d) En déduire un DL_3 de f^{-1} en 0.
Indication : on pourra poser $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{x\to 0}{O}(x^4)$ *et identifier les coefficients par composition* $f \circ f^{-1}$.

(e) Utiliser ce DL pour donner une solution approchée de l'équation $x + \ln(1+x) = 0,02$, puis comparer avec la valeur obtenue par une calculatrice.