# Contrôle continu 2

*(1h15)*

*Les documents et calculatrices sont interdits.*
*La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.*

**Exercice 1.** *(7 points)*

Le but de l'exercice est de démontrer le

LEMME DE CESÀRO : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$ converge également vers $l$.

(a) Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ |u_N - l + u_{N+1} - l + \ldots + u_n - l| \leq (n - N + 1)\varepsilon$.

(b) En déduire que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \geq N,\ |u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nl| \leq A + (n - N + 1)\varepsilon$.

(c) Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N',\ \dfrac{A}{n} \leq \varepsilon$.

(d) Conclure.

**Exercice 2.** *(5 points)*

(a) Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.

(b) Montrer que $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \geq n$, on a $0 \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{(-1)^m}{m} \leq \dfrac{1}{n}$.

*Indication : Regrouper les termes deux à deux de deux façons différentes.*

(c) Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

**Exercice 3.** *(8 points)* Soient $f : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$ et $(u_n)$ une suite récurrente définie par $u_0 \in ]-1, 2[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction $f$ et la droite d'équation $y = x$. Y représenter, sur l'axe des abscisses, les quatre premières valeurs de la suite $(u_n)$ pour $u_0 = \dfrac{3}{2}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in ]-1, 2[$ et $u_{2n+1} \in ]2, +\infty[$.

(c) On pose $v_n = u_{2n}$. Montrer que $(v_n)$ est une suite récurrente pour une fonction que l'on précisera. En déduire que la suite $(v_n)$ est croissante.

(d) Montrer que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. En déduire que $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

(e) Que se passe-t-il si $u_0 \in [2, +\infty[$ ?