UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L1 - ANALYSE 2 (HLMA202)
ANNÉE 2017-2018

Feuille d'exercices 9

FORMULES DE TAYLOR

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f'(x_0) > 0$. Montrer que f est croissante sur un voisinage de x_0. Comparer avec l'exercice 9.

Exercice 2. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f''(c) = 0$. *Indication : Utiliser le lemme de Rolle.*

Exercice 3. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $f(t) = \sqrt{t}$ entre $a = 100$ et $b = 101$. En déduire une approximation décimale de $\sqrt{101}$ à 10^{-6} près.

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4. On considère la fonction donnée par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
(b) Montrer que $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $f'(0)$.
(c) Trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^*$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f'(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(d) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $\cos$ sur $[0,x]$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!}\right| \leq \dfrac{x^6}{6!}$, puis une approximation rationnelle de $\cos(0,1)$ à 10^{-8} près.

Exercice 6. Montrer que $\forall x > 0$,

$$1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 < \sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3.$$

En déduire une valeur approchée de $\sqrt[3]{1,03}$ à 10^{-5} près.

Exercice 7. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(a) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes. Qu'en déduit-on ?
(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et calculer la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $\ln(1+x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(c) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} < \ln(1+x) < \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}.$$

(d) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 8. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur I.
Pour g, h dérivables sur I, on rappelle la formule d'*intégration par parties* : $\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b g(t)h'(t)dt = (g(b)h(b) - g(a)h(a)) - \int_a^b g'(t)h(t)dt.$$

Soit $x_0 \in I$. Démontrer la FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL : $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Indication : Procéder par récurrence sur n.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que $f'(0) = 1$.

(b) On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+2)}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}}\right)$.

  (i) Justifier que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$. En déduire que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+2)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}} = \frac{1}{2(2n+1)\sqrt{\pi(2n+2)}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

  (ii) Montrer que $\frac{1}{\pi(2n+2)} - \frac{1}{\pi(2n+1)} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

  (iii) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Montrer qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N,\ f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(2n+2)}}\right)$.
En déduire que f n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

(d) Tracer le graphe de la fonction f.

(e) Est-il vrai que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x_0) > 0$, alors f est croissante sur un voisinage de x_0 ? Comparer avec l'exercice 1.