

## Feuille d'exercices 10

### DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS : PREMIERS PAS

*Pour désigner un "développement limité à l'ordre  $n$ ", on utilisera l'abréviation " $DL_n$ ".*

#### 1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

**Exercice 1.** Donner les  $DL_2$ ,  $DL_4$ ,  $DL_{10}$  et  $DL_{2018}$  en 0 de  $f(x) = x^{58} + 2x^{12} + 5x^{10} + x^3$ .

**Exercice 2.** Donner les  $DL_n$  en 0 des fonctions  $e^x$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $(1+x)^\alpha$  et  $\ln(1+x)$ .

**Exercice 3.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Jusqu'à quel ordre la fonction  $x^\alpha$  admet-elle un développement limité en 0 ?

**Exercice 4.** Montrer que si  $f$  est une fonction paire (resp. impaire), alors les termes impairs (resp. pairs) de ses DL en 0 sont nuls.

#### 2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**Exercice 5.** Sommes de DL.

- (a) Donner le  $DL_5$  en 0 de  $\frac{1}{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$ .
- (b) Donner le  $DL_7$  en 0 de  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
- (c) Donner le  $DL_8$  en 0 de  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

**Exercice 6.** Produits de DL.

- (a) Donner le  $DL_3$  en 0 de  $\cos(x) \ln(1+x)$ .
- (b) Donner le  $DL_6$  en 0 de  $(1 - \cosh(x)) \sin(x)$ .
- (c) Donner le  $DL_8$  en 0 de  $\sqrt{1+x^2} \ln(1+x^3)$ .

**Exercice 7.** En posant  $y = x - 2$ , donner les  $DL_4$  en 2 des fonctions  $e^x$ ,  $(1+x)^\alpha$  et  $\ln(1+x)$ .

**Exercice 8.** Donner le  $DL_5$  en  $\frac{\pi}{3}$  de  $\cos x$ .

**Exercice 9.**

- (a) Montrer que  $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$ , puis en déduire que  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
- (b) En déduire un DL en 0 à tout ordre de  $\arctan$ .
- (c) Montrer que  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , puis en déduire un DL en 0 à tout ordre de  $\arcsin$ .