Feuille d'exercices 8

PETITS-o, GRANDS-O ET ÉQUIVALENTS

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient U_1, U_2 deux voisinages de x_0. Montrer que $U_1 \cap U_2$ est un voisinage de x_0. Qu'en est-il de $U_1 \cup U_2$?

Exercice 2. Tracer sur un même dessin les graphes des fonctions $x^3, x, \sqrt{x}, x^{\frac{1}{5}}, 1, x^{-1}, x^{-7}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Montrer que si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. A-t-on la réciproque ?

Exercice 4. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Déterminer toutes les fonctions f telles que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0$.

Exercice 5. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont-elles équivalentes en $+\infty$? Qu'en est-il pour $\cosh$ et $\sinh$?

Exercice 6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent simple en x_0 de
(a) $f(x) = x^2 + x - 6$,
(b) $g(x) = (x-1)^3$.

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 7. Donner un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de

(a) $-x^4 + x^3 + x^2 + 1$,
(b) $\dfrac{x^2 + 6x - 5}{7x^2 - 2x - 3}$,
(c) $2^{3x} + 3^{2x}$,
(d) $x^2 2^x - \dfrac{3^x}{x^3}$,
(e) $\sqrt{x^2 + 5}$,
(f) $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$,
(g) $\dfrac{x^2 + \ln(x)}{x^2 \ln(x)}$,
(h) $x^2 \ln(x)^3 - x^3 \ln(x)^2$,
(i) $e^{\frac{1}{x}} x^5 \ln(x) - e^x x^4 \ln(x)^2$.

Exercice 8. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
(a) Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$.
(b) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.
(c) Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x$, alors $f(x) - 5x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
(d) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $e^{f(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} e^{g(x)}$.

Exercice 9. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $e^{2x^2 - 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4}}$.

Exercice 10. En faisant apparaître des taux d'accroissements, donner un équivalent simple en 0 de

(a) $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,
(b) $(1+x)^\alpha - 1$ en 0, où $\alpha \in \mathbb{R}$,
(c) $\arctan(x)$,
(d) $\ln(1 + \sin(x))$.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 11. Soit f une fonction polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d$. Montrer qu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel f est monotone.

Exercice 12. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et que $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \left(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\right) \setminus \{1\}$. Montrer que $\ln f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ln g(x)$. Est-ce encore vrai pour $\ell = 1$?

Indication : On pourra montrer que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} - 1 = \dfrac{\ln \frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq 2f\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

(a) Justifier que f admet un maximum sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, f(x) \leq 2^k f\left(\dfrac{x}{3^k}\right)$.

(c) On pose $k_0 = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{x}{3^k} \leq 1\right\}$. Justifier l'existence de k_0 et montrer que $k_0 \leq \dfrac{\ln x}{\ln 3} + 1$.

(d) Montrer que $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O}\left(x^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)$.