

HLBE202 - Cartographie

CM2 : Forme de la Terre & Triangulation

Plan

- Sphère vs. Ellipsoïde
- Triangulation et Trilatération
- Erreur corrélée / non corrélée

Forme de la Terre

● **La Terre est :**

Plate & circulaire

...

posée sur 4
éléphants portés
par une tortue

« Discworld series »
de *T. Pratchett*



Forme de la Terre

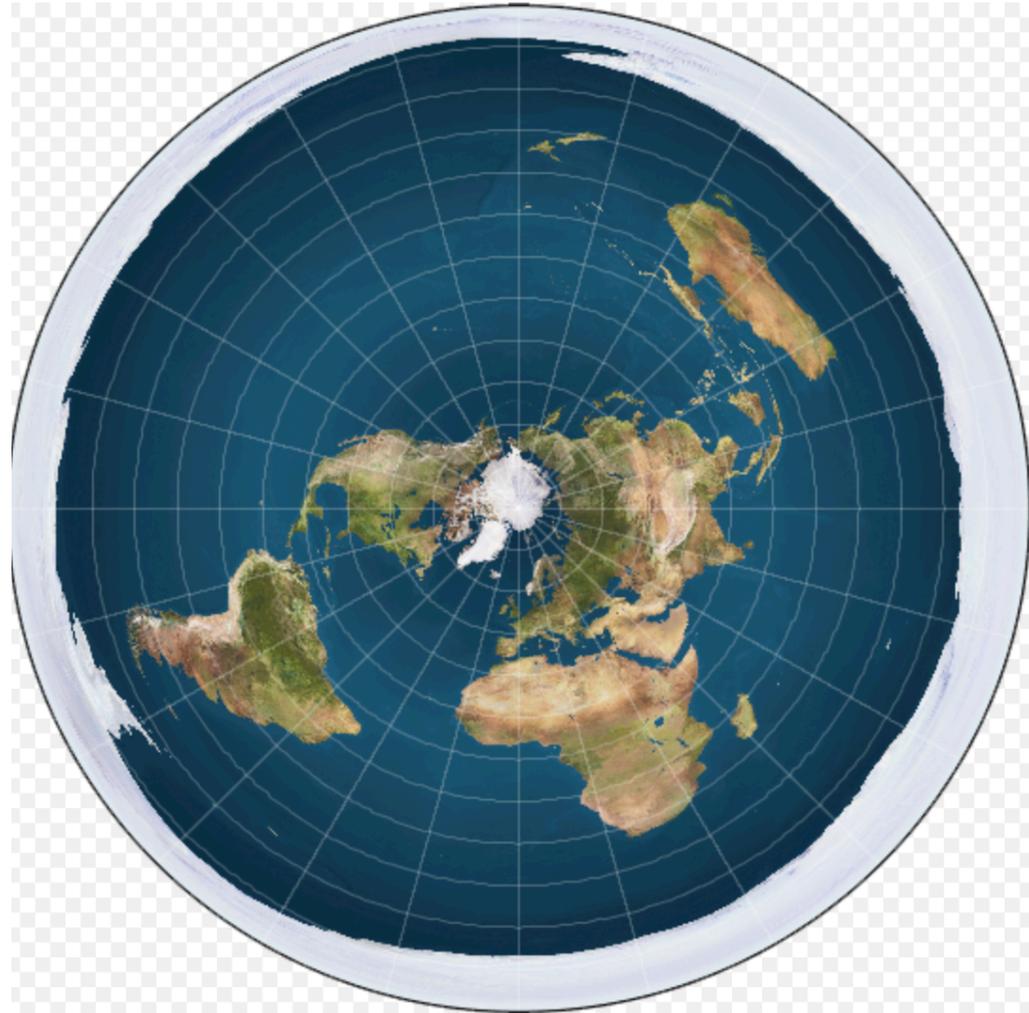
● **La Terre est :**

Plate & circulaire

...

entourée du mur
de glace de
l'Antarctique

Flat Earth Society
malheureusement
pas de la SF ...



Forme de la Terre

● La Terre est :

Plate & circulaire

...

entourée du mur
de glace de
l'Antarctique



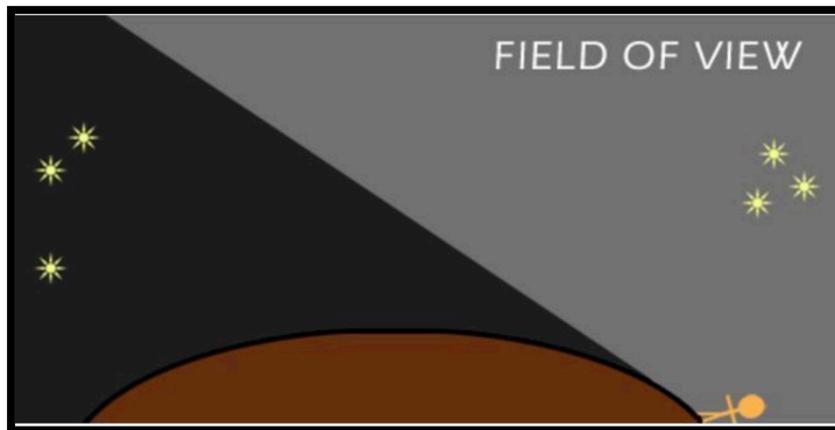
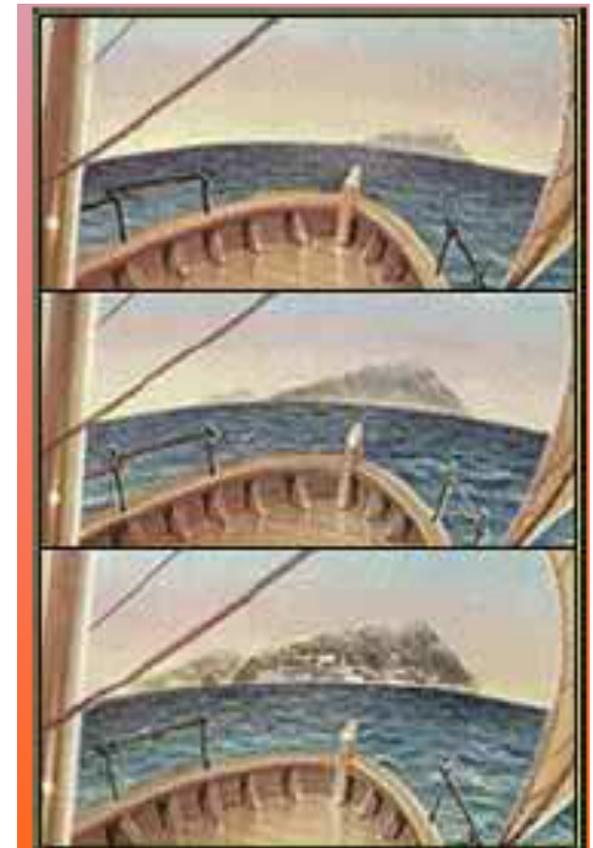
➔ On peut vraiment dire n'importe quoi si on ne comprends rien au principe de projection cartographique !

Forme de la Terre

● **La Terre est :**

Ronde, cf.

- Apparition progressive du paysage
- Constellations différentes en différents lieux



Forme de la Terre

La Terre est :

Ronde, cf.

- Forme de l'ombre terrestre lors d'une éclipse lunaire

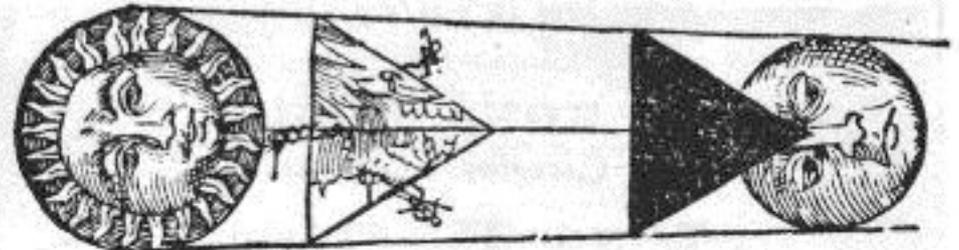
14 Premier Partie de la
Ceste Figure demonstre que la Terre est ronde.



Si la Terre estoit quaree, l'ombre d'icelle paroistroit de ceste mesme forme en l'Eclipse de la Lune.



Si la Terre estoit triangulaire, l'ombre d'icelle seroit aussi en l'Eclipse triangulaire.



Forme de la Terre

● La Terre est :

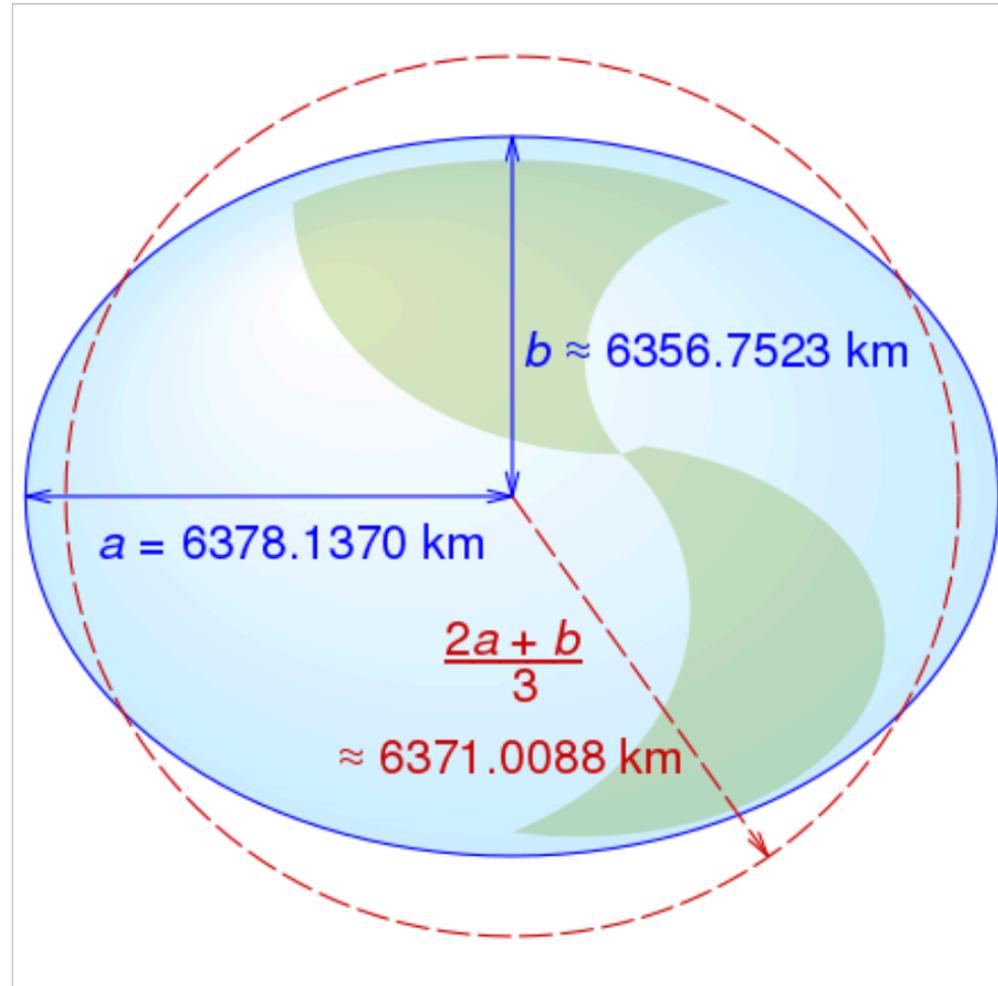
Ellipsoïdale

$$a_{\text{EQUATEUR}} \approx 6378 \text{ km}$$

$$b_{\text{POLE}} \approx 6357 \text{ km}$$

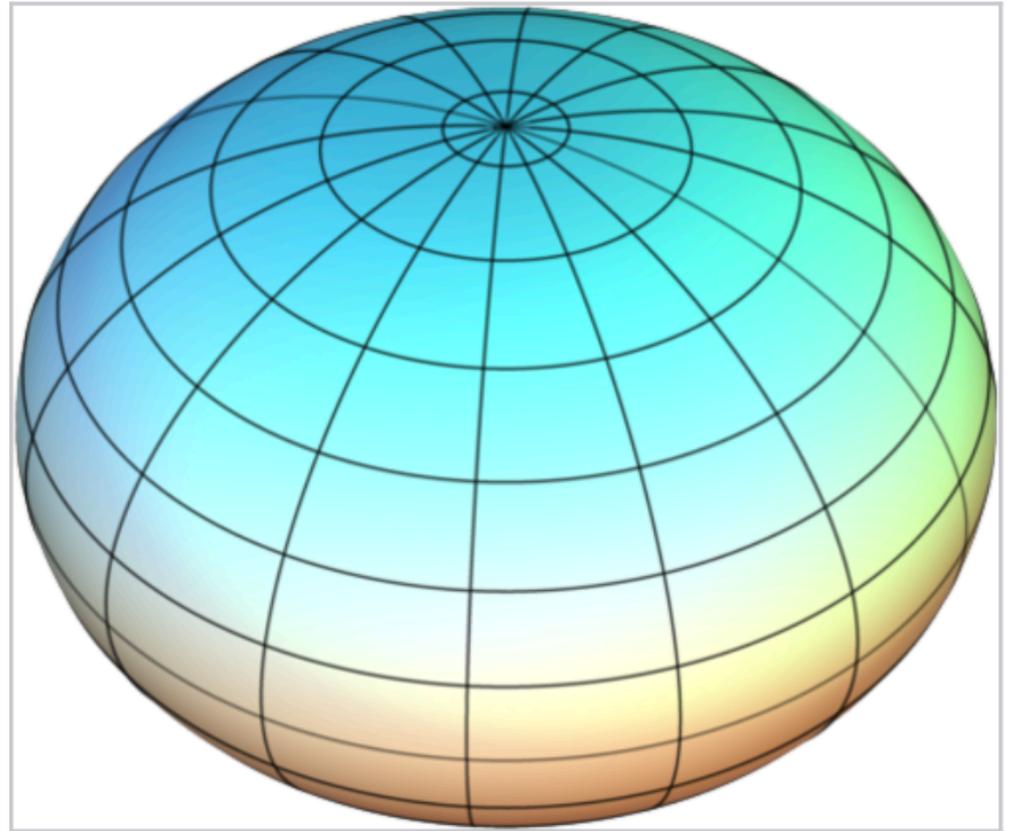
versus

$$R_{\text{CERCLE}} \approx 6371 \text{ km}$$



Forme de la Terre

- Ellipsoïdale, mais pourquoi ?

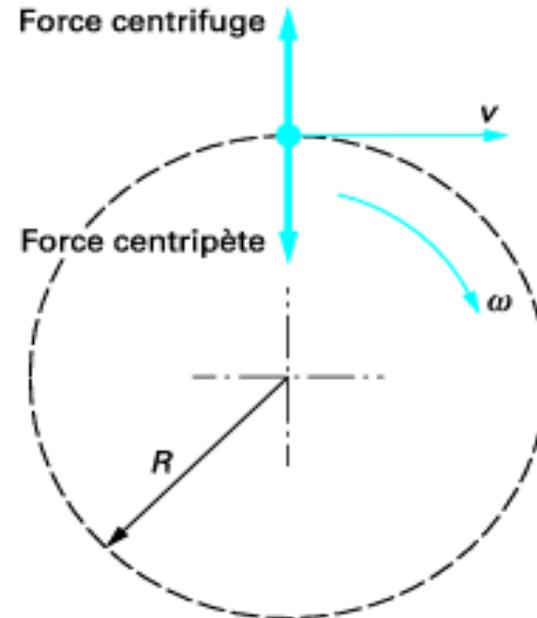


Forme de la Terre

- Ellipsoïdale, mais pourquoi ?

Déformation d'une sphère en rotation

→ Surface d'équilibre entre force de gravité et force centrifuge



m (kg) masse
 R (m) rayon
 v (m/s) vitesse tangentielle
 ω ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) vitesse de rotation

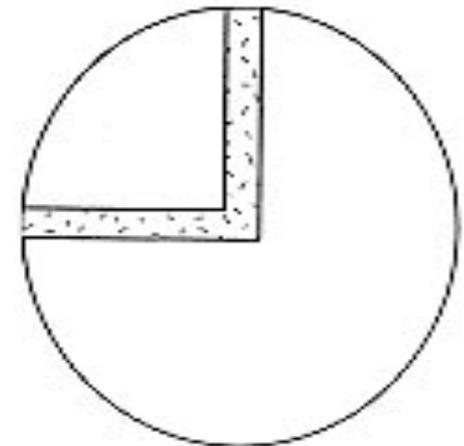
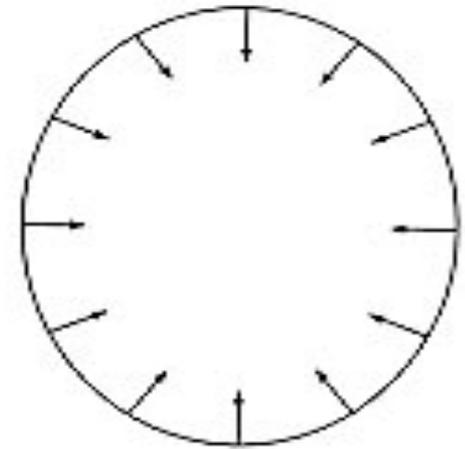
Accélération due à la rotation = $v^2/R = \omega^2 \cdot R$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

Force centrifuge = force centripète = $m \cdot v^2/R = m \cdot \omega^2 \cdot R$ (en N)

Forme de la Terre

• Déformation d'une sphère en rotation : Hypothèses

- Terre « visqueuse »
- Surface en tout point perpendiculaire à la pesanteur (cf. Newton)
- Deux canaux partant du pôle et de l'équateur et se rejoignant au centre sont à l'équilibre (cf. Huygens)



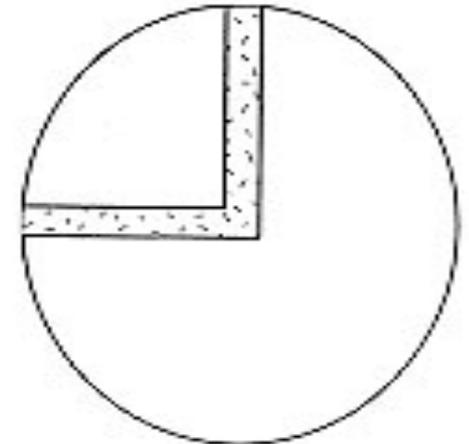
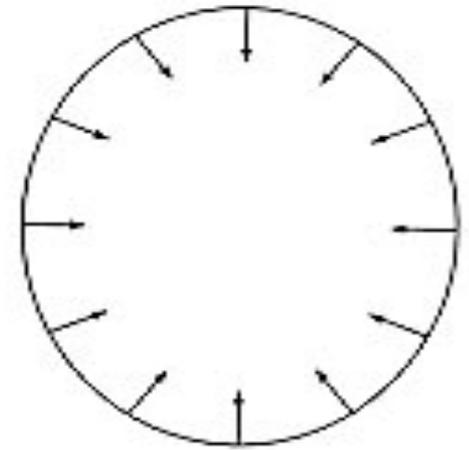
Forme de la Terre

• Déformation d'une sphère en rotation

→ Rapport $F_{\text{GRAVITE}} / F_{\text{CENTRIFUGUE}}$
à l'équateur donne l'aplatissement
de l'ellipsoïde

- Gravité : $F_g = GM / R^2$
- Centrifuge : $F_c = R w^2$

→ $F_c / F_g \approx 1 / 570$ (densité
homogène)



Forme de la Terre

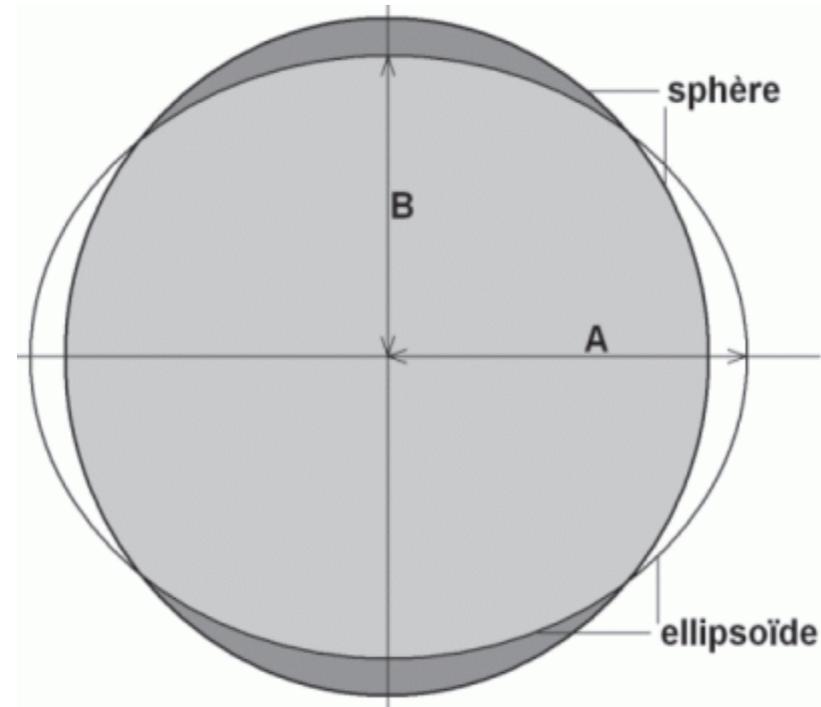
• Déformation d'une sphère en rotation

$F_c / F_g \approx 1 / 570$ (densité homogène)

$(a - b) / a_{\text{PREDIT}} \approx 1 / 570$

$(a - b) / a_{\text{VRAI}} \approx 1 / 290$

- Terre déformable
- Densité pas homogène
- Forme contrôlée par la répartition interne des masses

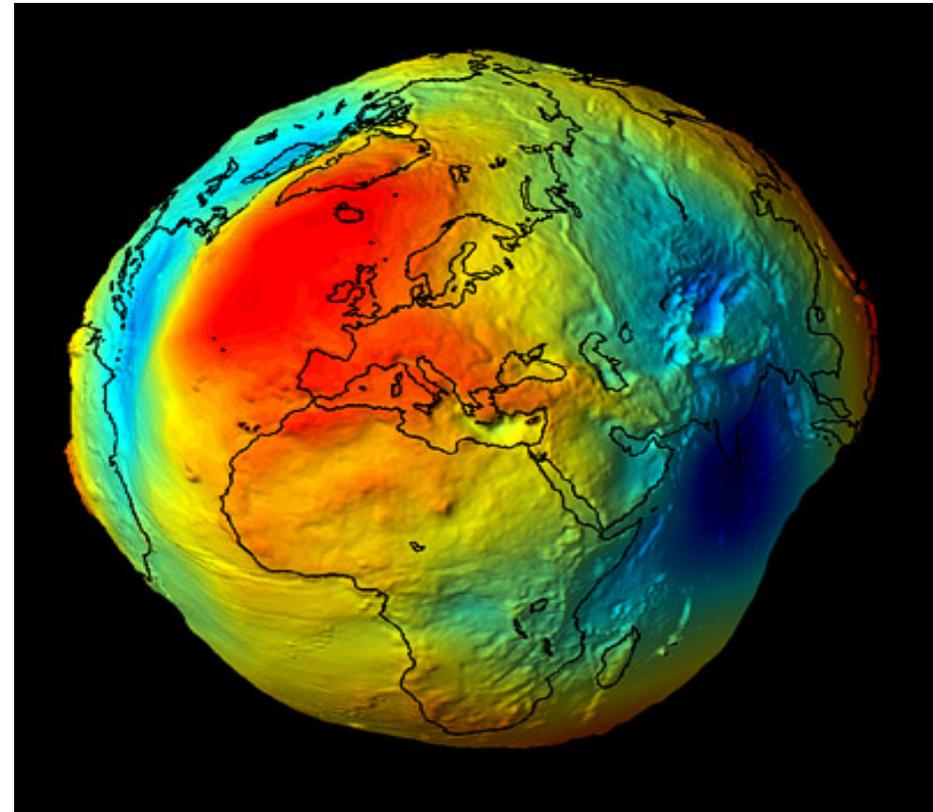


Forme de la Terre

- **La Terre est :**

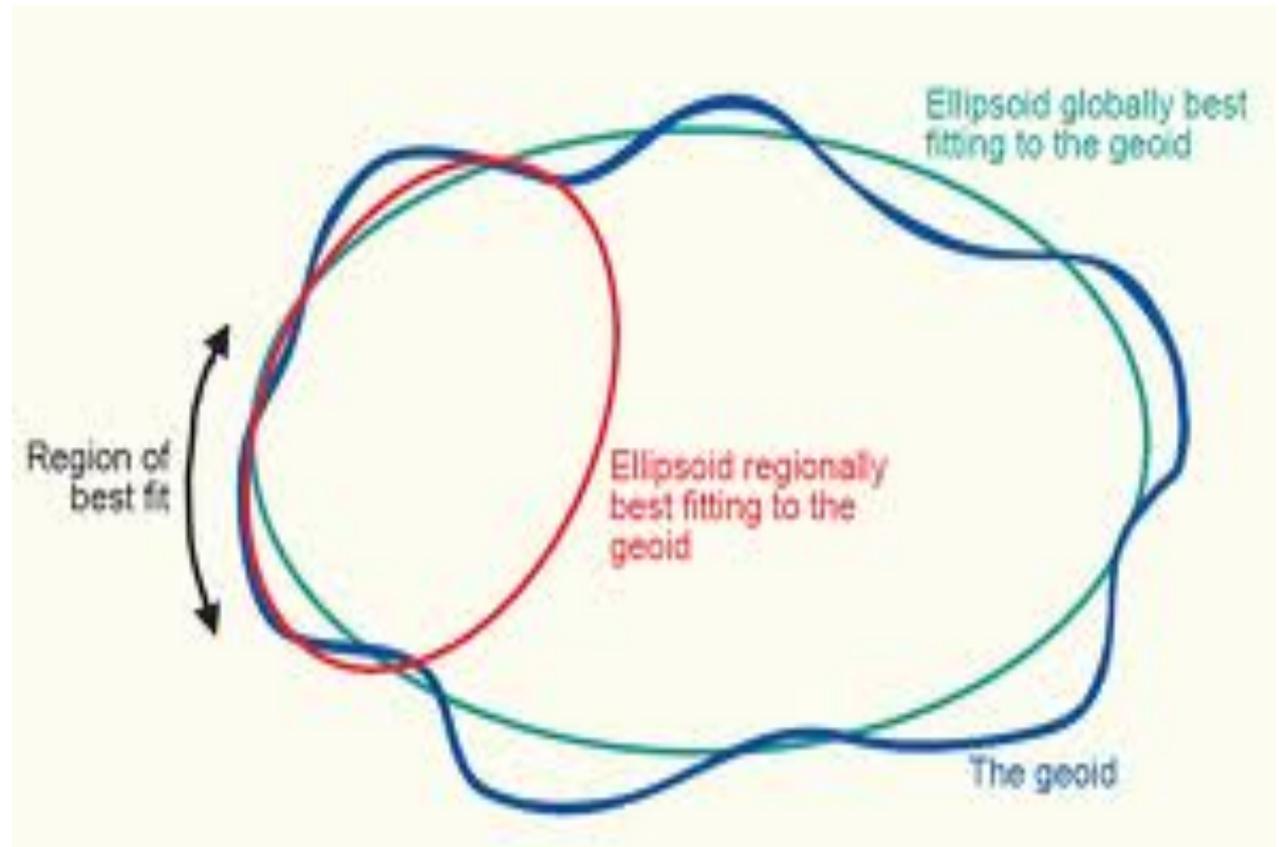
de forme complexe et variable dans le temps en fonction de la distribution des masses (cf. géoïde, CM3)

→ Approximée par un ellipsoïde



Forme de la Terre

- NB1 : L'approximation ellipsoïde peut être globale ou locale (pour une meilleure précision sur un pays)



Forme de la Terre

• NB2 : Il existe de nombreux ellipsoïdes de référence. Attention au choix !

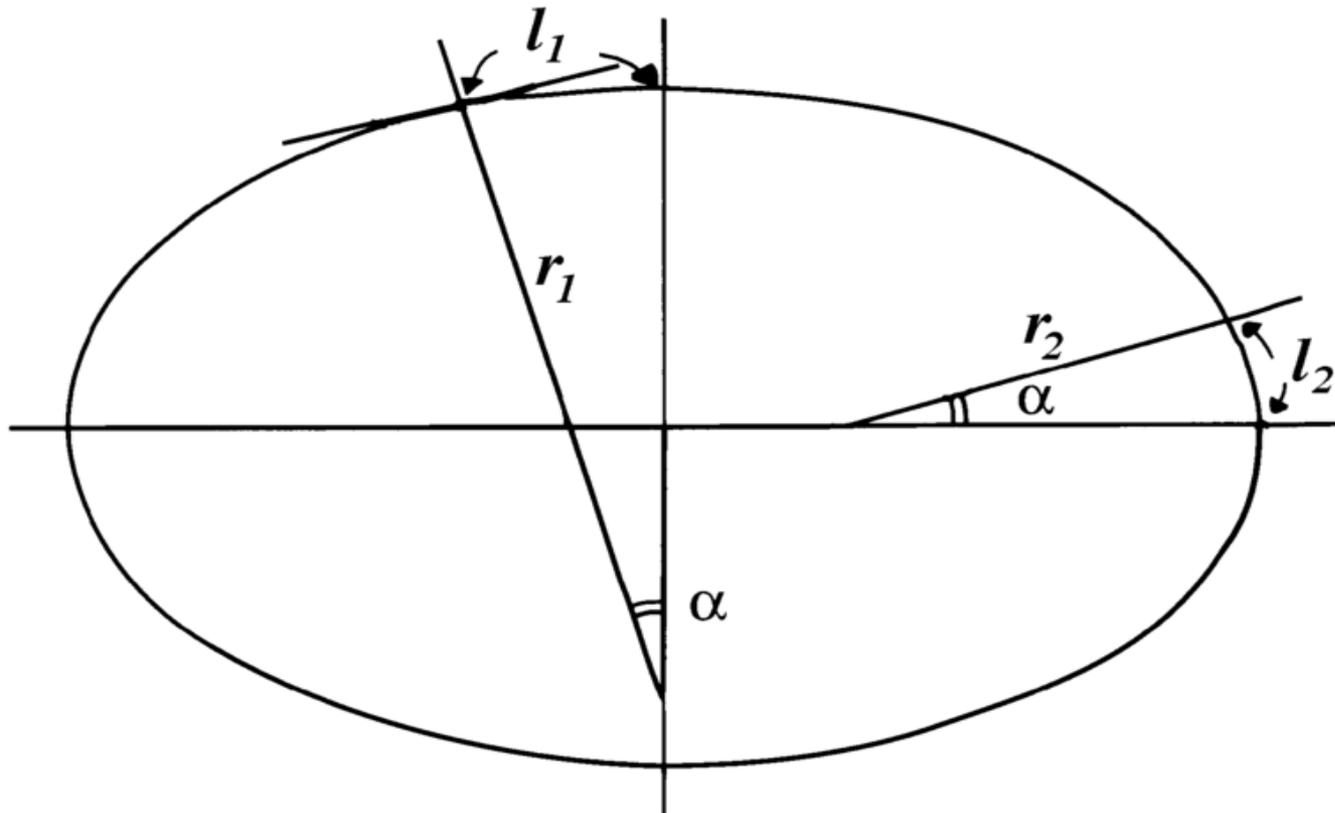
→ Différences métriques (voire kilométriques)

Ellipsoïde	a (km)	b (km)	aplatissement
WGS-84 (global)	6378.137	6356.752	1 / 298.257
GRS-67 (global)	6378.160	6356.774	1 / 298.247
Everest-1830 (SE Asie)	6377.298	6356.097	1 / 300.802



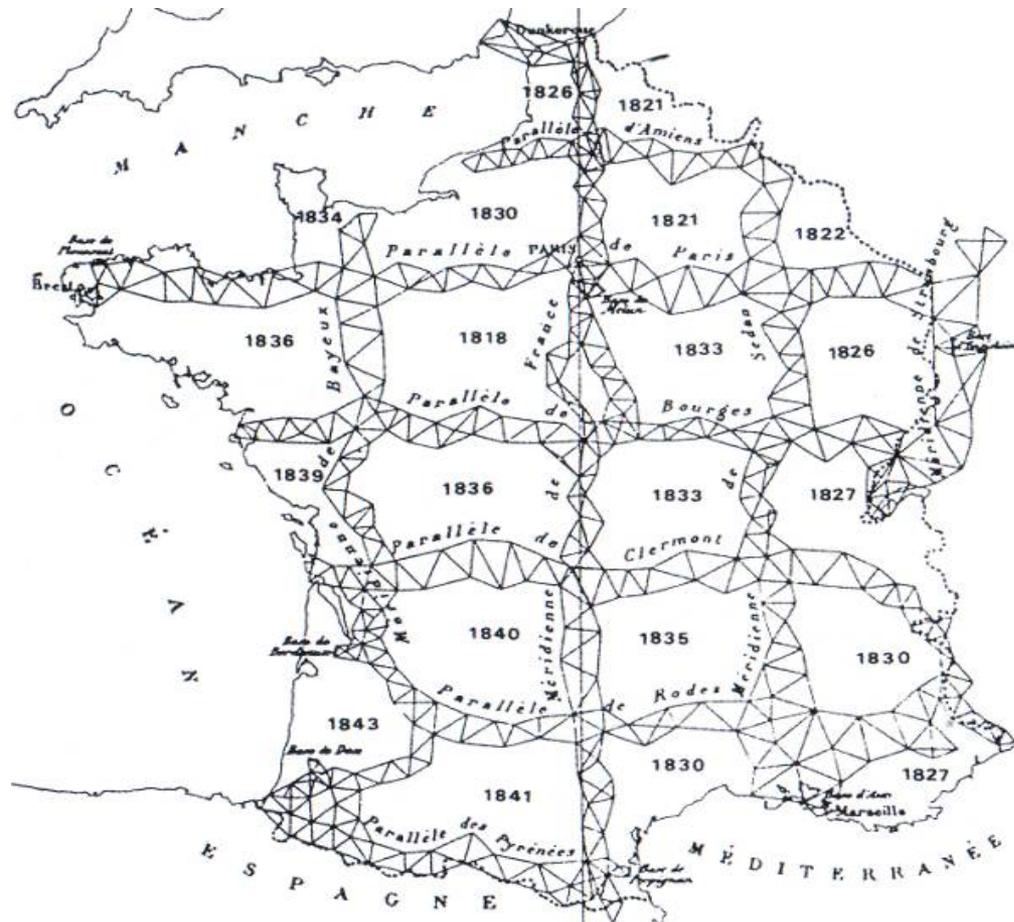
De la théorie à la mesure

- Vérification de la forme ellipsoïdale par mesures de distances



De la théorie à la mesure

Cassini : Terre aplatie vérifiée grâce à des mesures entre Dunkerque et Collioure



De la théorie à la mesure

- **Vidéo : la carte de Cassini**



De la théorie à la mesure

- Expéditions françaises et anglaise au XVIII^e

Au Pérou (Bouguer, La Condamine, Jussieu, ...)

En Laponie (Maupertuis, Clairaut, Celsius, ...)

→ Mesurer un arc de méridien à des latitudes très différentes



De la théorie à la mesure

- Expéditions françaises et anglaise au XVIII^e

En 1737, l'expédition en Laponie prouve que la terre est aplatie aux pôles

→ 1 mètre = $1 / 10^7$ du quart de méridien terrestre

L'expédition du Pérou rentre en 1744 et confirme que la terre est aplatie aux pôles

→ Confirmation aussi de la théorie de Newton sur la gravité

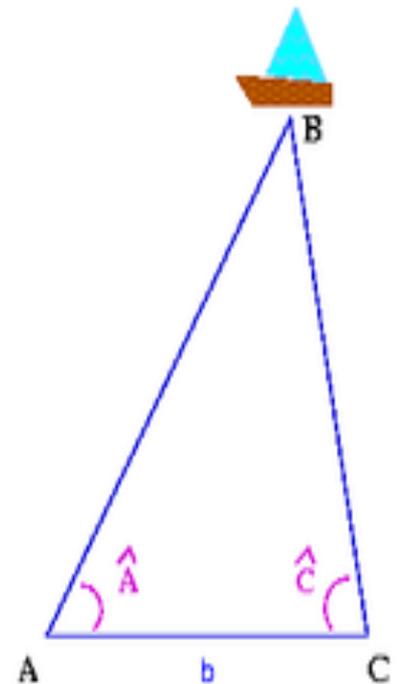


La mesure de distance par triangulation

- Principe de triangulation

Calculer une distance (inaccessible)
à partir des mesures de 2 angles et
1 distance (simple)

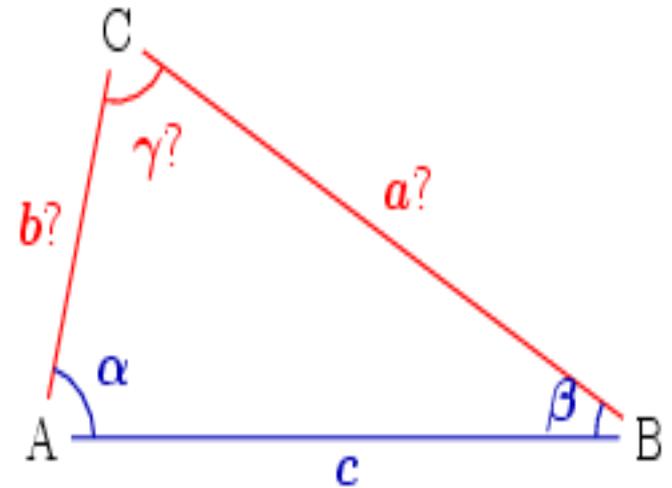
Ex. : Distance au bateau calculée
par mesures de b , A , et C



La mesure de distance par triangulation

- Principe de triangulation

Un peu de trigonométrie de base : un seul triangle est défini par 2 angles (α et β) et 1 coté (c)



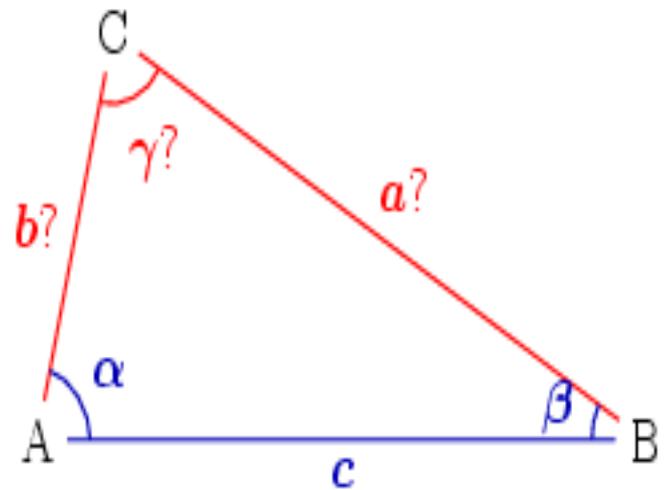
La mesure de distance par triangulation

- Principe de triangulation

Un peu de trigonométrie de base : un seul triangle est défini par 2 angles (α et β) et 1 coté (c)

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



La mesure de distance par triangulation

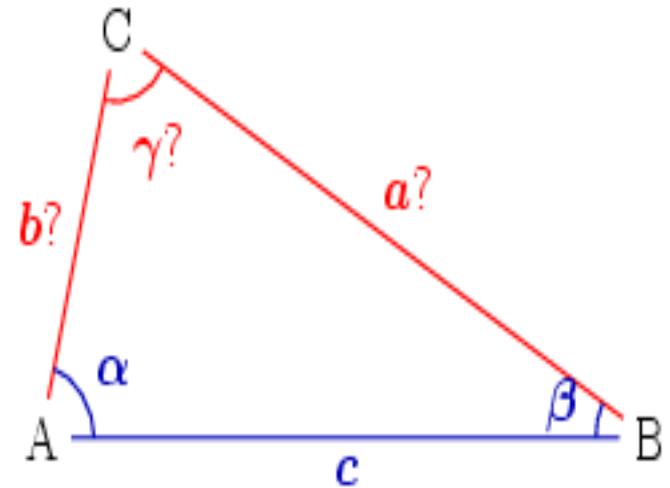
- Principe de triangulation

Un peu de trigonométrie de base : un seul triangle est défini par 2 angles (α et β) et 1 coté (c)

Donc

$$a = \frac{c \sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

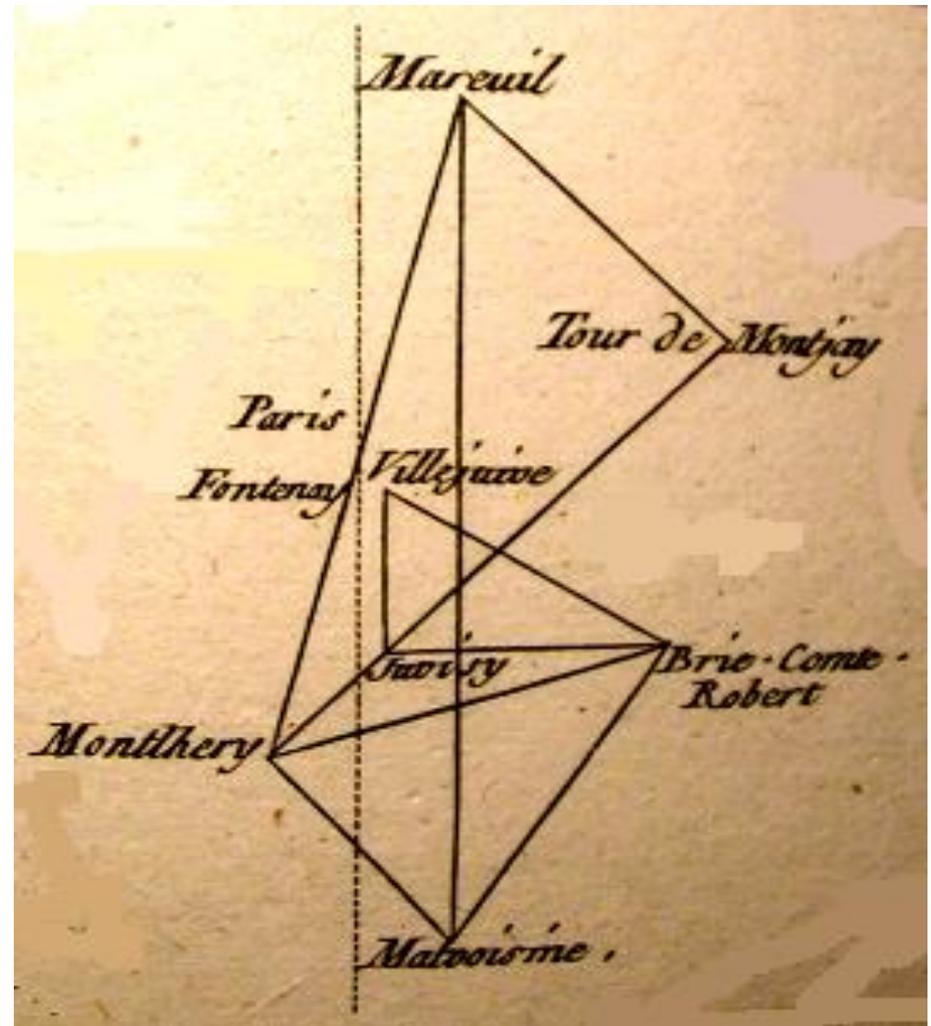
$$b = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$



La mesure de distance par triangulation

- Application en cartographie

Triangulation pour calculer toutes les distances sur la base de mesures d'angles



La mesure de distance par triangulation

- Application en cartographie

La triangulation de la France : 1032 points IGN pour le réseau de premier ordre

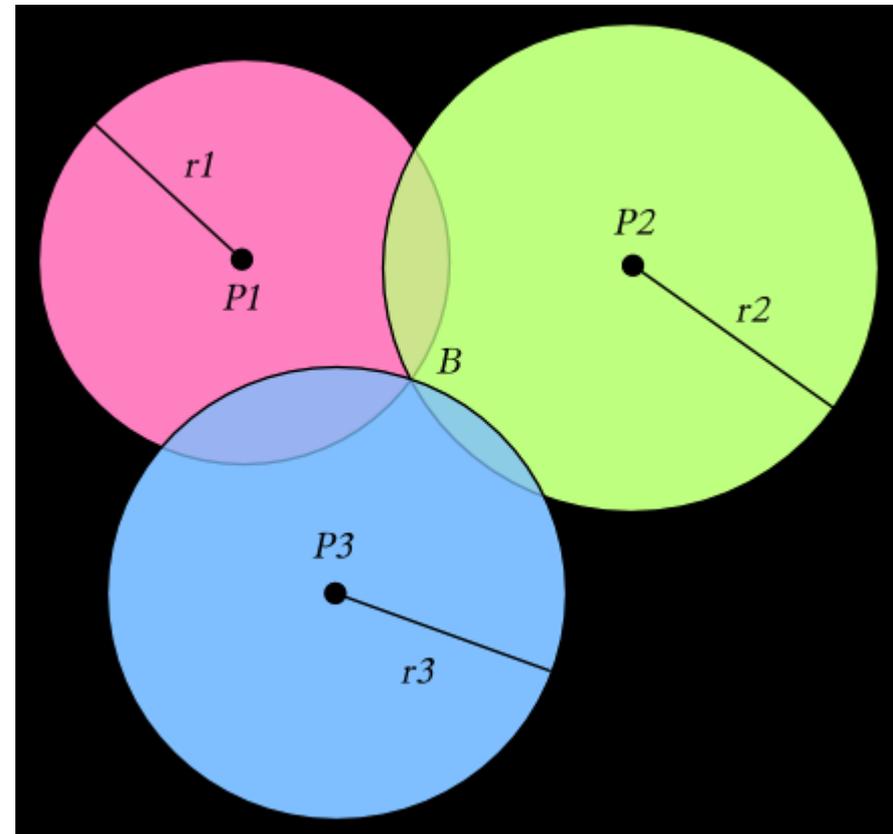


Le positionnement par trilatération

- Principe de trilatération

Une position 3D définie par 3 distances

NB : Basé sur 3 mesures de distances indépendantes

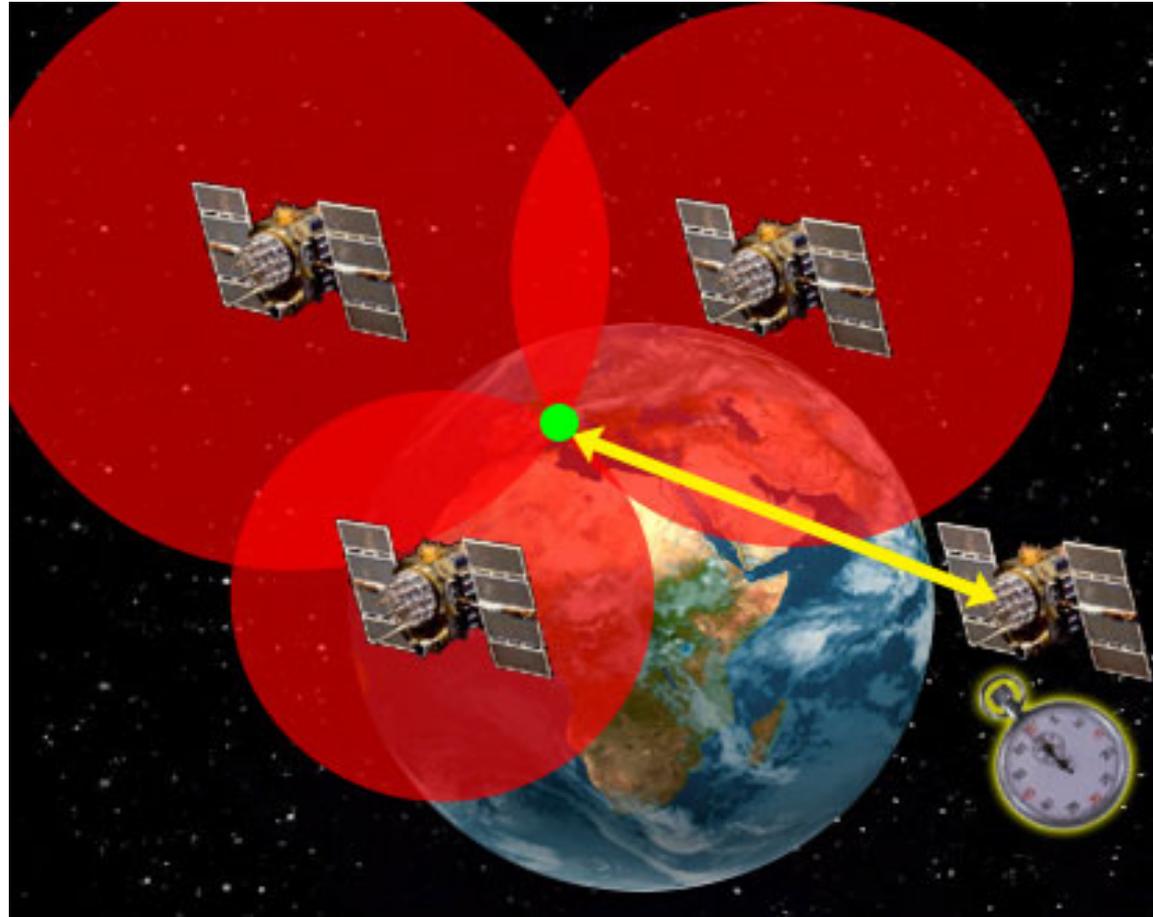


Le positionnement par trilatération

● Principe de trilatération

Principe de positionnement actuel par GPS

1 récepteur,
3 satellites
→ 1 position 3D



L'erreur sur le positionnement

- Erreur corrélée ou pas en fonction de la méthode

Triangulation : chaque mesure dépend des précédentes, donc une erreur de mesure influence les suivantes

→ Erreur corrélée (bruit coloré)

- ➔ L'incertitude augmente avec le nombre de mesures !
- ➔ L'incertitude finale est proportionnelle à la racine carré du nombre de mesures

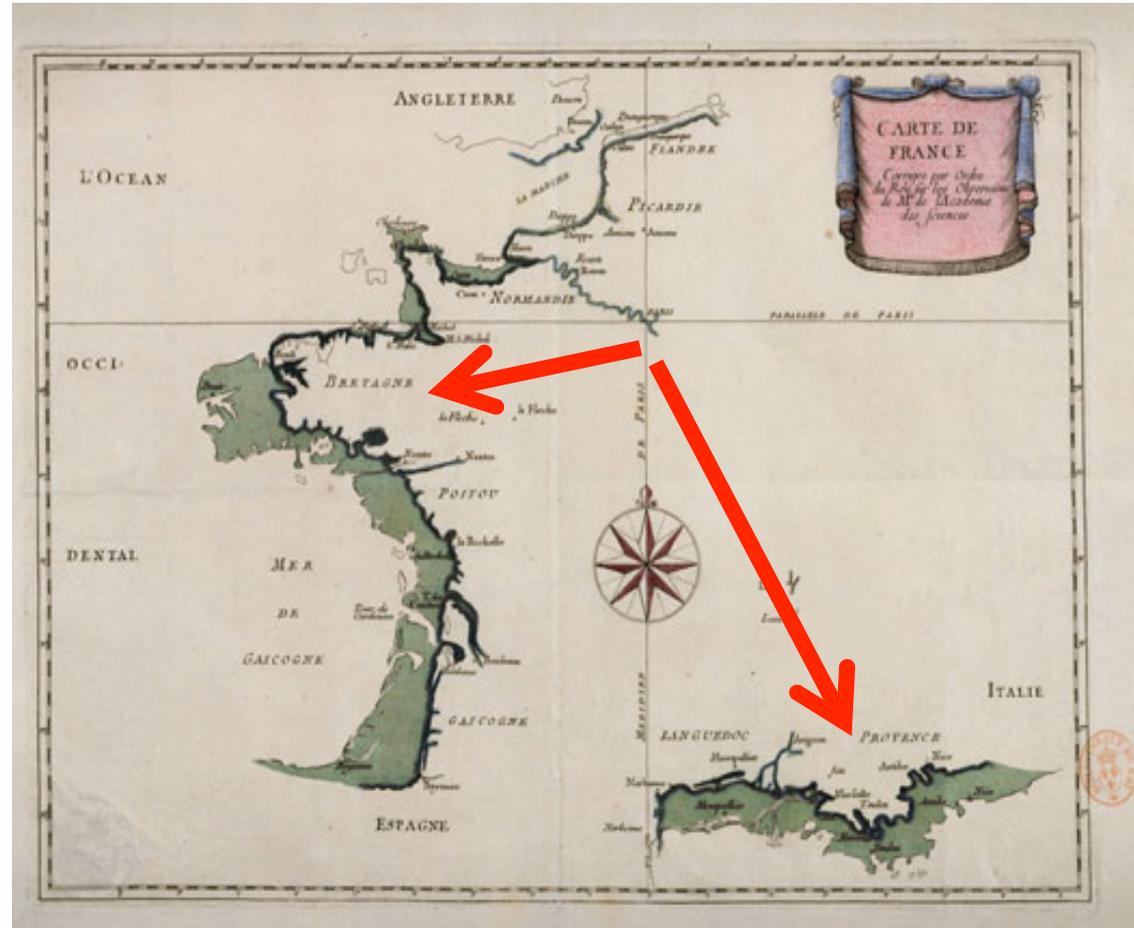


L'erreur sur le positionnement

- Erreur corrélée ou pas en fonction de la méthode

Triangulation

L'erreur augmente avec le nombre de mesures (et donc la distance à Paris)



L'erreur sur le positionnement

- Erreur corrélée ou pas en fonction de la méthode

Trilatération : chaque mesure est indépendante des précédentes, donc une erreur de mesure n'influence pas les suivantes

→ Erreur non corrélée (bruit blanc)

→ L'incertitude finale diminue avec la racine carré du nombre de mesures

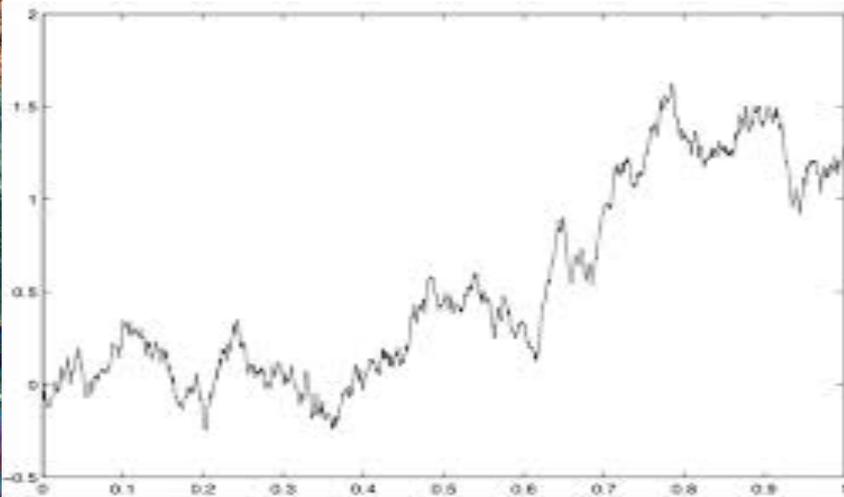
L'erreur sur le positionnement

- Erreur corrélée ou pas en fonction de la méthode

Triangulation

Bruit corrélé

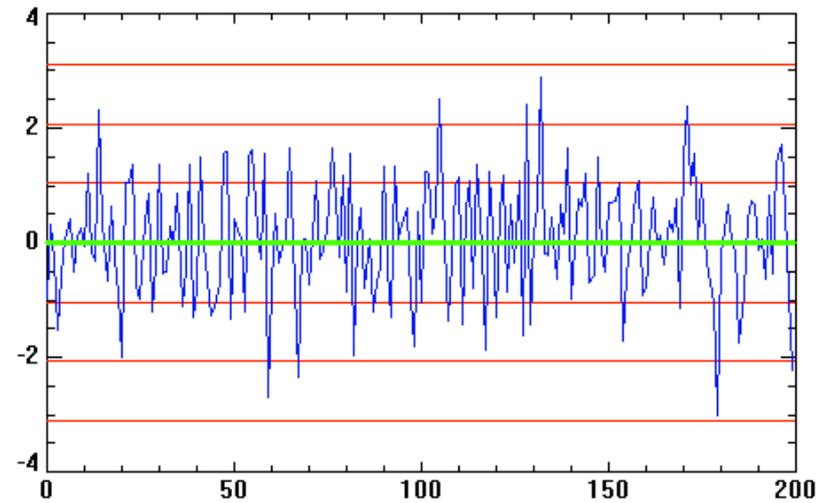
Moyenne non nulle



Trilatération

Bruit blanc

Moyenne nulle



Pour aller un peu plus loin

• <http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/XML/db/planetterre/metadata/LOMhistorique.xml>

http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM_CSP_Mississippi.xml

http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1987_num_40_3_4062

<http://www.cosmovisions.com/geodesieChrono.htm>

<http://www.sabix.org/bulletin/b39/geodesie.html>