Feuille d'exercices 7

RUDIMENTS DE TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1.
(a) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée, et x un réel. Montrer que

$$x = \sup A \iff \begin{cases} & \forall a \in A,\ a \leq x, \\ \text{et} & \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x. \end{cases}$$

(b) En déduire que toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide, majorée et fermée admet un maximum.

Exercice 2. On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *complète* si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge vers un élément de A. Montrer que A est complète si et seulement si A est fermée.

Exercice 3. Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles fermées ? ouvertes ? compactes ? complètes ?

(a) $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b$,
(b) $]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R},\ a < b$,
(c) $[a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R},\ a < b$,
(d) $[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$,
(e) $\mathbb{Q}$,
(f) $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| < \varepsilon.$$

Montrer que

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Exercice 5. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que $\overline{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathcal{VA}(u_n)$.

Exercice 6. On considère une famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fermés de $\mathbb{R}$.
(a) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ est fermée.
(b) Montrer que $A_1 \cup A_2$ est fermée.
(c) Donner un exemple de famille pour laquelle $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ n'est pas fermée.

Exercice 7. Soit U une partie non-vide à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$.
(a) On pose $U_b = U \cap\,]-\infty, b]$. Montrer que $\sup U_b \leq b$ et que $\sup U_b \in U_b$.
(b) Montrer que $\sup U_b = b$. *Indication : raisonner par l'absurde.*
(c) En conclure que $b \in U$, puis que $U = \mathbb{R}$.
(d) En déduire que $\mathbb{R}$ ne peut pas s'écrire comme union de deux ouverts non vides disjoints.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Le but de l'exercice est de démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in U\}$ est ouverte.

(a) On suppose f continue sur $\mathbb{R}$. Soient $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, puis $x_0 \in f^{-1}(U)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset U$. En déduire que $f^{-1}(U)$ est ouverte.

(b) Supposons réciproquement que pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est ouverte. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right).$$

Conclure.