Feuille d'exercices 6

SUITES DE CAUCHY

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy. Qu'en déduit-on ?

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(a) Montrer que si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, alors (u_n) tend vers 0.

(b) La réciproque est-elle vraie ? (cf. exercice 3.)

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $(H_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

(c) Montrer que (H_n) n'est pas de Cauchy.

(d) En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(a) Montrer que $\forall k \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) Montrer que $(G_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 5. Soient $q \in\,]-1, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \cos(\theta^k)$.

Montrer que (v_n) converge.

Exercice 6. Soient (u_n) une suite réelle et $k \in\,]-1, 1[$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 7. Soit (u_n) la suite récurrente définie par par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que (u_n) est minorée par u_0.

(b) En utilisant le résultat de l'exercice 6, montrer que (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.