Corrigé du TD : chercher des équilibres de Nash sans matrice

Théorie des jeux, M1 . Pour montrer qu'un profil est un équilibre de Nash (EN), on vérifie qu'aucune déviation unilatérale ne rapporte plus ; pour montrer qu'il n'en est pas un, il suffit d'exhiber un joueur et une déviation qui lui rapporte strictement plus.

Partie A : stratégies pures

Exercice 1 : le dilemme du voyageur

Le seul EN est (2, 2), alors que (100, 100) rapporterait 100 à chacun.

1. **Non.** Chacun obtient 100. Si le voyageur 1 annonce 99, il reçoit la plus petite annonce plus le bonus : 99 + 2 = 101 > 100. Cette déviation est profitable.
2. Supposons $a_1 < a_2$. Le voyageur 2 reçoit $a_1 - 2$. S'il annonce a_1 lui aussi, les annonces sont égales et il reçoit $a_1 > a_1 - 2$. Il a donc une déviation profitable : le profil n'est pas un EN. Le raisonnement est le même si $a_1 > a_2$.
3. D'après la question 2, un EN est de la forme (a, a).
   - Si $a \geqslant 3$, un voyageur qui annonce $a - 1$ reçoit $(a - 1) + 2 = a + 1 > a$: pas un EN.
   - Si a = 2, chacun reçoit 2. Annoncer b > 2 fait de lui celui qui annonce le plus : il reçoit 2 − 2 = 0 < 2. Aucune déviation n'est profitable.
   - **Le seul EN est (2, 2).** Il est très inefficace par rapport à (100, 100). En laboratoire, les sujets annoncent souvent des montants élevés, surtout quand le bonus est faible.

Exercice 2 : le partage de 10 euros

Il y a 12 EN : les 11 partages exacts (x, 10 − x) et le profil (10, 10).

1. **(4, 6) est un EN.** Le joueur 1 obtient 4 : demander plus fait dépasser 10 et il obtient 0, demander moins lui rapporte moins. Même raisonnement pour le joueur 2 avec 6. **(4, 5) n'est pas un EN** : le joueur 2 peut demander 6, la somme reste égale à 10 et il obtient 6 > 5.
2. **(10, 10) est un EN.** Chacun obtient 0. Face à une demande de 10, toute demande $x \geqslant 1$ fait dépasser 10, et demander 0 rapporte 0 : le joueur ne peut pas obtenir plus que 0. Même chose pour l'autre. Personne n'a de déviation *strictement* profitable.
3. On distingue trois cas selon la somme des demandes :
   - Somme inférieure à 10 : un joueur peut demander un peu plus et gagner plus. Pas un EN.

- Somme égale à 10 : un joueur qui demande plus obtient 0, un joueur qui demande moins obtient moins. Les 11 profils (0, 10), (1, 9), …, (10, 0) sont des EN.
- Somme supérieure à 10 : les deux obtiennent 0. Si $y \leqslant 9$, le joueur 1 peut demander $10 - y \geqslant 1$ et obtenir un gain positif. Il faut donc $y = 10$, et de même $x = 10$: seul (10, 10) est un EN.
- **Efficacité :** les 11 partages exacts sont des optimums de Pareto (on ne peut pas augmenter un gain sans diminuer l'autre). (10, 10) ne l'est pas : il donne (0 ; 0), Pareto-dominé par n'importe quel partage exact.

Exercice 3 : le bien public à seuil

Les EN sont « personne ne contribue » et tous les profils avec exactement k contributeurs.

Gains : si le bien est réalisé, un contributeur obtient $B - c$ et un non-contributeur B ; sinon, un contributeur obtient $-c$ et un non-contributeur 0.

1. **Oui.** Chacun obtient 0. Un habitant qui contribue seul ne suffit pas à atteindre le seuil ($k \geqslant 2$) : il obtient $-c < 0$.
2. On examine les trois cas :
   - **Exactement k contributeurs : EN.** Un contributeur qui arrête fait tomber le nombre à $k - 1$: il passe de $B - c$ à 0, ce qui est pire car $B > c$. Un non-contributeur qui contribue passe de B à $B - c$, ce qui est pire aussi.
   - **Plus de k contributeurs : pas un EN.** Un contributeur peut arrêter, le seuil reste atteint et il passe de $B - c$ à B.
   - **Entre 1 et k − 1 contributeurs : pas un EN.** Le bien n'est pas réalisé ; un contributeur qui arrête passe de $-c$ à 0.
3. Il y a $1 + C(n, k)$ EN : le profil où personne ne contribue, plus une façon de choisir les k contributeurs parmi n. Par exemple, pour $n = 5$ et $k = 3$, il y a $1 + 10 = 11$ EN.
4. **Si k = 1**, « personne ne contribue » n'est plus un EN : un habitant qui contribue seul réalise le bien et passe de 0 à $B - c > 0$. Les EN sont les n profils où exactement un habitant contribue. On retrouve le dilemme du volontaire (exercice 11) : tout le monde sait qu'il faut un volontaire, mais personne ne sait qui.

Exercice 4 : le concours de beauté

Tout le monde à 0 est un EN ; avec des entiers et $n \geqslant 4$, tout le monde à 1 en est un aussi.

On normalise le prix à 1. Quand tout le monde choisit le même nombre, tous sont ex aequo et chacun obtient $1/n$.

1. **Tout le monde à 50 n'est pas un EN.** Un joueur qui choisit 49 fait un peu baisser la moyenne, donc la cible vaut au plus $2/3 \times 50 \approx 33{,}3$. Les deux nombres 49 et 50 sont au-dessus de la cible, et 49 en est plus proche : il gagne seul et obtient $1 > 1/n$.

2. **Même argument pour tout a > 0.** La moyenne vaut au plus a, donc la cible t vérifie t ⩽ (2/3)a < a. Un joueur qui choisit un nombre b entre (2/3)a et a est strictement plus proche de la cible que les autres, qui restent à a. Il gagne seul : 1 > 1/n.
3. **Tout le monde à 0 est un EN.** Si un joueur choisit x > 0, la moyenne devient x/n et la cible 2x/(3n). Les autres sont à la distance 2x/(3n), le déviant à la distance x − 2x/(3n). Le déviant est plus loin dès que 1 − 2/(3n) > 2/(3n), c'est-à-dire n > 4/3, ce qui est toujours vrai. Il perd et obtient 0 < 1/n.
4. **Avec des entiers et n ⩾ 4, tout le monde à 1 est un EN.** Chacun obtient 1/n.
    - Déviation vers 0 : la cible devient 2(n − 1)/(3n), qui vaut au moins 1/2 dès que n ⩾ 4. Les joueurs restés à 1 sont au moins aussi proches que le déviant. Pour n > 4, le déviant perd ; pour n = 4, la cible vaut exactement 1/2, c'est une égalité et il obtient 1/4, comme avant. Pas de gain strict.
    - Déviation vers x ⩾ 2 : la moyenne augmente, mais la cible reste trop basse pour que x soit plus proche que 1. Le déviant ne gagne jamais.
    - **Pourquoi n ⩾ 4 ?** Pour n = 3, la cible après une déviation vers 0 vaut 4/9 < 1/2 : le déviant est plus proche et gagne seul. Pour n = 2, elle vaut 1/3 : même conclusion.

En laboratoire, les sujets choisissent en moyenne des nombres bien supérieurs à 0 (souvent entre 20 et 35). L'EN suppose que chacun pense que tous les autres sont rationnels, et que les autres le pensent aussi, à l'infini.

Exercice 5 : l'enchère au second prix

Offrir sa valeur est un EN, mais ce n'est pas le seul : (0, 15) en est un aussi, et il est inefficace.

1. **(10, 6) est un EN.** Le joueur 1 gagne, paie 6 et obtient 10 − 6 = 4.
    - Joueur 1 : toute offre supérieure à 6 donne le même résultat (4) ; offrir 6 donne une égalité et l'espérance ½ × 4 = 2 ; offrir moins de 6 le fait perdre (0). Rien ne rapporte plus que 4.
    - Joueur 2 : il obtient 0. Pour gagner, il doit offrir plus de 10 et paierait alors 10 : gain 6 − 10 = −4 < 0. Rien ne rapporte plus que 0.
2. **(0, 15) est un EN.** Le joueur 2 gagne et paie 0 : gain 6.
    - Joueur 1 : pour gagner, il doit offrir plus de 15 et paierait 15 : gain 10 − 15 = −5 < 0. Il reste à 0.
    - Joueur 2 : toute offre positive le fait gagner au prix 0 (gain 6) ; offrir 0 donne une égalité (espérance 3). Rien ne rapporte plus que 6.
    - **Le joueur 2 obtient l'objet alors que le joueur 1 lui accorde plus de valeur (10 > 6) : le résultat est inefficace.** Cet EN repose sur une offre du joueur 2 supérieure à sa valeur, ce qui serait dangereux si le joueur 1 offrait davantage.

3. On note p l'offre de l'autre joueur et v sa propre valeur.
    - **Si p < v :** offrir v fait gagner au prix p, avec un gain v − p > 0. Une autre offre au-dessus de p donne le même gain ; une offre en dessous de p fait perdre (0). Offrir v n'est jamais pire.
    - **Si p > v :** offrir v fait perdre (0). Gagner obligerait à offrir plus que p et à payer p > v, donc à perdre de l'argent. Offrir v n'est jamais pire.
    - **Si p = v :** le gain est 0 quelle que soit l'offre.
    - Offrir sa valeur est donc une stratégie **faiblement dominante**, comme vu en cours (enchères de Vickrey).

Exercice 6 : les marchands de glace sur la plage

Avec deux marchands, le seul EN est (1/2 ; 1/2) ; avec trois, il n'y a aucun EN.

1. **(0,3 ; 0,7) n'est pas un EN.** Les clients se partagent au milieu, en 0,5 : chacun a une part de 0,5. Si le marchand 1 s'installe en 0,69, la frontière passe en (0,69 + 0,7)/2 = 0,695 : sa part devient 0,695 > 0,5.
2. **(1/2 ; 1/2) est un EN.** Chacun a 1/2. Un marchand qui part en x < 1/2 garde les clients situés entre 0 et le milieu de x et 1/2 : sa part vaut (x + 1/2)/2 < 1/2. Même chose vers la droite.
    - **C'est le seul.** Si les marchands sont à deux endroits différents, celui de gauche peut se rapprocher de l'autre et gagner des clients (comme à la question 1).
    - S'ils sont au même endroit a ≠ 1/2, par exemple a < 1/2, chacun a 1/2. Un marchand qui se décale légèrement à droite récupère presque tout le côté droit, soit environ 1 − a > 1/2.
3. **Avec trois marchands, il n'y a aucun EN.**
    - Si un marchand est seul à l'emplacement le plus à gauche, il peut se rapprocher de son voisin : il garde tous les clients situés à sa gauche et en gagne au milieu. Ce n'est pas un EN. Même chose à droite.
    - À un EN, il faudrait donc au moins deux marchands à l'emplacement le plus à gauche et au moins deux à l'emplacement le plus à droite. Avec trois marchands, ce n'est possible que si les trois sont au même endroit a.
    - Dans ce cas, chacun a 1/3. Un marchand qui se décale légèrement du côté le plus long récupère presque toute cette partie de la plage, soit au moins 1/2 > 1/3. Ce n'est pas un EN non plus.

Partie B : stratégies mixtes

Exercice 7 : pile ou face, sans calcul compliqué

L'unique EN est que chacun joue Pile et Face avec probabilité 1/2.

J1 \ J2	Pile	Face
Pile	1 ; −1	−1 ; 1
Face	−1 ; 1	1 ; −1

1. Dans chaque case, l'un des deux joueurs perd. Celui qui perd peut changer de côté et gagner : il passe de −1 à 1. Aucun profil de stratégies pures n'est un EN.
2. Avec q = 0,7, Pile rapporte au joueur 1 : 0,7 × 1 + 0,3 × (−1) = 0,4, et Face : −0,4. Le joueur 1 joue donc Pile. Le joueur 2, qui veut des côtés différents, répond alors Face, c'est-à-dire q = 0. **Il ne peut pas y avoir d'équilibre avec q = 0,7** : le joueur 2 ne resterait pas à 0,7.
3. Joueur 1 : Pile rapporte q − (1 − q) = 2q − 1 et Face rapporte 1 − 2q. Il n'a aucun regret quand les deux sont égaux, soit **q = 1/2**. Par le même calcul pour le joueur 2, **p = 1/2**. **EN : ((1/2, 1/2) ; (1/2, 1/2))**, avec une espérance de gain nulle pour chacun.
4. Face à q = 1/2, jouer toujours Pile rapporte aussi 0 : le joueur 1 ne ferait pas moins bien. Mais si le joueur 1 jouait toujours Pile, le joueur 2 jouerait Face et gagnerait à chaque fois. Le mélange à 50/50 sert à rester imprévisible : c'est ce qui maintient l'autre joueur indifférent, et donc l'équilibre.

Exercice 8 : vrai ou faux ?

Tout repose sur une idée : à un EN en stratégies mixtes, les stratégies jouées rapportent toutes autant, et au moins autant que celles qui ne sont pas jouées.

Affirmation	Réponse	Justification
(a) Jouer A avec 0,8 et B avec 0,2 signifie que A rapporte plus que B	**Faux**	A et B rapportent la même espérance de gain. Les probabilités ne reflètent pas ce que A et B rapportent au joueur : elles sont fixées pour rendre l'autre joueur indifférent.
(b) Les stratégies jouées avec une probabilité positive rapportent la même espérance	**Vrai**	C'est le principe d'indifférence. Si l'une rapportait plus, le joueur gagnerait à ne jouer qu'elle.

Affirmation	Réponse	Justification
(c) Une stratégie jamais jouée peut rapporter strictement plus que celles jouées	**Faux**	Le joueur aurait alors intérêt à la jouer : ce ne serait pas un EN. Elle peut rapporter autant ou moins, jamais plus.
(d) Un joueur qui mélange ferait aussi bien en jouant à coup sûr une des stratégies mélangées	**Vrai**	Les autres restant fixés, chaque stratégie du mélange rapporte la même chose. Mais ce changement ne serait plus un EN : l'autre joueur réagirait (exercice 7, question 4).
(e) Une stratégie strictement dominée peut être jouée avec une probabilité positive	**Faux**	Elle rapporte toujours moins qu'une autre stratégie : elle n'est jamais une meilleure réponse, donc jamais dans le support d'un EN.
(f) Si A et B sont deux meilleures réponses, tout mélange de A et B en est une aussi	**Vrai**	Le gain d'un mélange est la moyenne pondérée des gains de A et de B. Ces deux gains sont égaux au maximum, donc la moyenne aussi.

Exercice 9 : quand un joueur gagne plus, joue-t-il plus souvent ?

Malgré l'intuition, le joueur 1 ne joue pas Pile plus souvent : c'est le joueur 2 qui change, en jouant Pile avec probabilité 1/5 au lieu de 1/2.

1. Les gains sont ceux de l'exercice 7 transformés par $u \mapsto (u + 1)/2$, une transformation affine croissante : les comportements ne changent pas. **EN : p = q = 1/2.**
2. L'intuition dit souvent oui : Pile rapporte davantage au joueur 1. La suite montre que c'est faux.
3. Nouveau jeu :

J1 \ J2	Pile	Face
Pile	4 ; 0	0 ; 1
Face	0 ; 1	1 ; 0

- (Pile, Pile) : le joueur 2 préfère Face (1 > 0). (Pile, Face) : le joueur 1 préfère Face (1 > 0).
- (Face, Face) : le joueur 2 préfère Pile (1 > 0). (Face, Pile) : le joueur 1 préfère Pile (4 > 0).
- Aucun profil de stratégies pures n'est un EN.

4. Indifférence des deux joueurs :

- **Joueur 1 :** Pile rapporte 4q, Face rapporte 1 − q. Il est indifférent si 4q = 1 − q, soit **q = 1/5**.
- **Joueur 2 :** Pile rapporte 1 − p (il gagne quand le joueur 1 joue Face), Face rapporte p. Il est indifférent si **p = 1/2**.
- **EN : p = 1/2, q = 1/5.**

5. **Le joueur 1 ne change pas son comportement** (p reste 1/2) : sa probabilité est fixée par les gains du joueur 2, qui n'ont pas changé. **C'est le joueur 2 qui s'adapte** : il joue Pile moins souvent (1/5) pour ne pas laisser le joueur 1 profiter du gain de 4. Le joueur 1 en profite quand même : son espérance de gain passe de 1/2 à 4 × 1/5 = 0,8.

Exercice 10 : pierre, feuille, ciseaux

L'unique EN est que chacun joue les trois stratégies avec probabilité 1/3.

1. En cas d'égalité, chaque joueur peut passer à la stratégie qui bat celle de l'autre et gagner 1 au lieu de 0. Sinon, le perdant peut changer pour gagner. Aucun profil de stratégies pures n'est un EN.
2. Face à ½ Pierre + ½ Feuille, les espérances du joueur 1 sont :

Stratégie du joueur 1	Contre Pierre	Contre Feuille	Espérance
Pierre	0	−1	−1/2
Feuille	1	0	**1/2**
Ciseaux	−1	1	0

La meilleure réponse du joueur 1 est Feuille, en stratégie pure. Le joueur 2 répondrait alors Ciseaux et ne garderait pas son mélange : ce profil ne peut pas faire partie d'un EN.

3. Face à (1/3, 1/3, 1/3), chaque stratégie du joueur 1 rapporte 1/3 × 0 + 1/3 × 1 + 1/3 × (−1) = 0. Le joueur 1 est indifférent entre ses trois stratégies : n'importe laquelle, et n'importe quel mélange, est une meilleure réponse.
4. D'après la question 3, (1/3, 1/3, 1/3) est une meilleure réponse du joueur 1 à (1/3, 1/3, 1/3) ; par symétrie, c'est vrai aussi pour le joueur 2. Chacun joue une meilleure réponse à l'autre : **c'est un EN**, avec une espérance de gain nulle pour chacun.
5. Si l'adversaire joue Pierre plus souvent que Ciseaux, Feuille rapporte P(Pierre) − P(Ciseaux) > 0. L'adversaire peut donc en profiter en jouant Feuille plus souvent. C'est pour cela qu'à l'équilibre, chacun doit rester parfaitement imprévisible.

Exercice 11 : le dilemme du volontaire

Plus il y a de témoins, moins chacun appelle, et plus la probabilité que personne n'appelle augmente : de 25 % avec 2 témoins à 46 % avec 10.

1. **Les EN en stratégies pures sont les n profils où exactement un témoin appelle.**
   - Celui qui appelle obtient 10 − 5 = 5 ; s'il n'appelle pas, personne n'appelle et il obtient 0. Les autres obtiennent 10 ; appeler leur rapporterait 5.
   - Si personne n'appelle, chacun a 0 et gagnerait 5 en appelant. Si plusieurs appellent, chacun d'eux gagnerait à ne pas appeler (10 > 5).
   - Il est difficile de savoir lequel de ces EN sera joué : les témoins sont dans des situations identiques, et rien ne désigne le volontaire.
2. « Appeler » rapporte toujours 10 − 5 = **5**. « Ne pas appeler » rapporte 10 si au moins un des n − 1 autres appelle, 0 sinon. Espérance : **$10 \times [1 - (1 - p)^{n-1}]$**.
3. À l'équilibre, chaque témoin est indifférent : 5 = 10 × [1 − (1 − p)$^{n-1}$], soit **$(1 - p)^{n-1} = 1/2$**.
4. On en déduit p = 1 − (1/2)^(1/(n−1)). La probabilité que personne n'appelle vaut $(1 - p)^n$ = (1/2)^(n/(n−1)).

Nombre de témoins n	Probabilité d'appeler p	Probabilité que personne n'appelle
2	0,500	0,250
3	0,293	0,354
10	0,074	0,463

5. **Non, il ne faut pas préférer un accident avec beaucoup de témoins.** Quand n augmente, chacun compte davantage sur les autres et appelle moins souvent. Cet effet l'emporte sur le plus grand nombre de témoins : la probabilité que personne n'appelle augmente et tend vers 1/2 quand n devient très grand. C'est l'**effet du témoin** étudié en psychologie sociale (Darley et Latané, 1968), souvent expliqué par la dilution de la responsabilité. Le modèle montre que ce résultat peut apparaître même avec des individus parfaitement rationnels.