TD : chercher des équilibres de Nash sans matrice

Rappel. Un profil de stratégies est un *équilibre de Nash* (EN) si aucun joueur ne peut augmenter son gain en changeant *seul* de stratégie, les stratégies des autres restant fixées.
Deux réflexes : pour montrer qu'un profil *est* un EN, on vérifie qu'aucune déviation unilatérale ne rapporte plus ; pour montrer qu'il *n'est pas* un EN, il suffit de trouver *un* joueur et *une* déviation qui lui rapporte strictement plus.

Partie A : stratégies pures

Exercice 1 : Le dilemme du voyageur

Deux voyageurs ont perdu chacun une valise identique. La compagnie leur demande, séparément, d'annoncer sa valeur : un entier entre 2 et 100. Si les deux annonces sont égales, chacun reçoit ce montant. Sinon, chacun reçoit la plus petite des deux annonces, avec un bonus de 2 pour celui qui a annoncé le moins et une pénalité de 2 pour l'autre.

1. Le profil $(100, 100)$ est-il un équilibre de Nash ?
2. Montrez qu'un profil où les deux annonces sont différentes ne peut pas être un EN.
3. Trouvez tous les équilibres de Nash.

Exercice 2 : Le partage de 10 euros

Deux joueurs demandent simultanément un montant entier entre 0 et 10 euros. Si la somme des deux demandes est inférieure ou égale à 10, chacun obtient ce qu'il a demandé. Sinon, aucun des deux n'obtient rien.

1. Le profil $(4, 6)$ est-il un EN ? Et $(4, 5)$?
2. Le profil $(10, 10)$ est-il un EN ?
3. Trouvez tous les EN. Sont-ils tous efficaces ?

Exercice 3 : Le bien public à seuil

n habitants décident chacun de contribuer (ce qui leur coûte c) ou non. Le bien public n'est réalisé que si au moins k habitants contribuent, avec $2 \leq k < n$. S'il est réalisé, chaque habitant (contributeur ou non) en retire un bénéfice B, avec $B > c > 0$.

1. Le profil où personne ne contribue est-il un EN ?
2. Un profil avec exactement k contributeurs est-il un EN ? Et avec plus de k contributeurs ? Et avec un nombre de contributeurs compris entre 1 et $k - 1$?
3. Combien y a-t-il d'équilibres de Nash ?
4. Que se passe-t-il si $k = 1$?

Exercice 4 : Le concours de beauté

$n \geq 2$ joueurs choisissent chacun un nombre réel entre 0 et 100. Le gagnant est celui dont le nombre est le plus proche des 2/3 de la moyenne des nombres choisis. En cas d'égalité, le prix est partagé entre les ex-aequo.

1. Montrez que le profil où tout le monde choisit 50 n'est pas un EN.
2. Plus généralement, montrez que si tout le monde choisit le même nombre $a > 0$, ce n'est pas un EN.
3. Montrez que le profil où tout le monde choisit 0 est un EN.

4. *Variante.* On ne peut plus choisir que des nombres entiers. Montrez que si $n \geq 4$, le profil où tout le monde choisit 1 est aussi un EN.

Exercice 5 : L'enchère au second prix

Un objet est vendu aux enchères sous pli scellé. Le joueur 1 lui accorde une valeur de 10, le joueur 2 une valeur de 6. Chacun soumet une offre (un nombre positif ou nul). Celui qui fait l'offre la plus élevée obtient l'objet et paie *l'offre de l'autre*. En cas d'égalité, on tire à pile ou face. Le gain du gagnant est sa valeur moins le prix payé ; le perdant ne paie rien et gagne 0.

1. Montrez que le profil $(10, 6)$, où chacun offre sa valeur, est un EN.
2. Montrez que le profil $(0, 15)$ est aussi un EN. Qui obtient l'objet ? Ce résultat est-il efficace ?
3. *Pour aller plus loin.* Montrez que, quelle que soit l'offre de l'autre, offrir sa propre valeur ne rapporte jamais moins que toute autre offre.

Exercice 6 : Les marchands de glace sur la plage

Des marchands de glace choisissent simultanément leur emplacement sur une plage représentée par le segment $[0, 1]$. Les clients sont répartis uniformément le long de la plage et vont chez le marchand le plus proche. Des marchands installés au même endroit se partagent leurs clients à parts égales. Chaque marchand cherche à avoir la plus grande part de marché possible.

1. Il y a deux marchands. Montrez que le profil (0,3 ; 0,7) n'est pas un EN.
2. Montrez que le seul EN est (1/2 ; 1/2).
3. Il y a maintenant trois marchands. Montrez qu'il n'existe aucun EN. *Indication : que peut faire un marchand qui est seul à l'emplacement le plus à gauche ?*

Partie B : stratégies mixtes

Rappel. Une *stratégie mixte* consiste à tirer au sort sa stratégie pure selon des probabilités choisies (par exemple : « Pile avec probabilité 0,7, Face avec probabilité 0,3 »). Chaque joueur évalue alors ses stratégies par leur *espérance de gain*. La définition de l'équilibre de Nash ne change pas : personne ne doit pouvoir faire mieux en changeant seul de stratégie (pure ou mixte).

Exercice 7 : Pile ou face, sans calcul compliqué

Deux joueurs montrent simultanément une pièce, côté Pile ou côté Face. Si les deux côtés sont identiques, le joueur 1 gagne 1 euro que lui verse le joueur 2. Sinon, c'est le joueur 2 qui gagne 1 euro que lui verse le joueur 1.

1. Montrez qu'aucun profil de stratégies pures n'est un EN.
2. Le joueur 2 joue Pile avec probabilité $q = 0{,}7$. Que doit faire le joueur 1 ? Que fera alors le joueur 2 ? Peut-on avoir un équilibre dans lequel le joueur 2 joue Pile avec probabilité 0,7 ?
3. Pour quelle valeur de q le joueur 1 n'a-t-il aucun regret, quoi qu'il joue ? Pour quelle valeur de p (probabilité que le joueur 1 joue Pile) le joueur 2 n'a-t-il aucun regret ? Déduisez-en l'équilibre de Nash du jeu.
4. À l'équilibre, le joueur 1 ferait-il moins bien en jouant toujours Pile ? Pourquoi ne le fait-il pas ?

Exercice 8 : Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez en une ou deux phrases. On se place dans un équilibre de Nash où les joueurs peuvent utiliser des stratégies mixtes.

(a) Si un joueur joue A avec probabilité 0,8 et B avec probabilité 0,2, c'est que A lui rapporte plus que B.

(b) Toutes les stratégies pures qu'un joueur joue avec une probabilité positive lui rapportent la même espérance de gain.

(c) Une stratégie pure qu'un joueur ne joue jamais peut lui rapporter strictement plus que celles qu'il joue.

(d) Un joueur qui mélange ferait aussi bien en jouant à coup sûr l'une des stratégies pures qu'il mélange.

(e) Une stratégie strictement dominée peut être jouée avec une probabilité positive.

(f) Si A et B sont deux meilleures réponses d'un joueur, alors n'importe quel mélange de A et B est aussi une meilleure réponse.

Exercice 9 : Quand un joueur gagne plus, joue-t-il plus souvent ?

On reprend un jeu de pile ou face, avec d'autres gains. Le joueur 1 gagne 1 si les deux côtés sont identiques et 0 sinon. Le joueur 2 gagne 1 si les côtés sont différents et 0 sinon. On note p la probabilité que le joueur 1 joue Pile et q celle que le joueur 2 joue Pile.

1. Sans calcul, quel est l'équilibre de Nash de ce jeu ? (Inspirez-vous de l'exercice 7.)
2. On modifie un seul gain : quand les deux joueurs jouent Pile, le joueur 1 gagne désormais 4 au lieu de 1. Tous les autres gains sont inchangés. À votre avis, avant tout calcul, le joueur 1 va-t-il jouer Pile plus souvent ?
3. Vérifiez qu'il n'existe toujours aucun EN en stratégies pures.
4. Quelle condition sur q rend le joueur 1 indifférent entre Pile et Face ? Quelle condition sur p rend le joueur 2 indifférent ? Déduisez-en l'équilibre de Nash.
5. Comparez avec la question 1. Qui modifie son comportement ? Le joueur 1 profite-t-il de la modification ?

Exercice 10 : Pierre, feuille, ciseaux

Deux joueurs choisissent simultanément Pierre, Feuille ou Ciseaux. La pierre bat les ciseaux, les ciseaux battent la feuille, la feuille bat la pierre. Le gagnant reçoit 1, le perdant -1, et chacun reçoit 0 en cas d'égalité.

1. Montrez qu'il n'existe aucun EN en stratégies pures.
2. Le joueur 2 joue Pierre et Feuille avec probabilité 1/2 chacune, et jamais Ciseaux. Calculez l'espérance de gain de chacune des trois stratégies du joueur 1. Ce profil peut-il faire partie d'un EN ?
3. Le joueur 2 joue chacune des trois stratégies avec probabilité 1/3. Calculez l'espérance de gain de chaque stratégie du joueur 1. Que pouvez-vous en conclure ?
4. Montrez que le profil où chacun joue les trois stratégies avec probabilité 1/3 est un EN.
5. Un joueur a tendance à jouer Pierre plus souvent que les autres stratégies. Comment son adversaire peut-il en profiter ?

Exercice 11 : Le dilemme du volontaire (calculatrice autorisée)

$n \geq 2$ personnes assistent à un accident. Chacune peut appeler les secours, ce qui lui coûte 5 (temps, désagrément). Si au moins une personne appelle, chaque témoin retire un bénéfice de 10, qu'il ait appelé ou non. Si personne n'appelle, chacun obtient 0.

1. Quels sont les EN en stratégies pures ? Pourquoi est-il difficile de savoir lequel sera joué ?
2. On cherche un équilibre symétrique où chaque témoin appelle avec la même probabilité p. Que rapporte « appeler » à un témoin ? Que lui rapporte « ne pas appeler », si chacun des $n-1$ autres appelle avec probabilité p ?
3. En utilisant le principe d'indifférence, montrez qu'à l'équilibre $(1-p)^{n-1} = 1/2$.
4. Calculez p et la probabilité que personne n'appelle pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 10$.
5. Commentez : faut-il préférer un accident avec beaucoup de témoins ? Faites le lien avec l'effet du témoin en psychologie sociale.