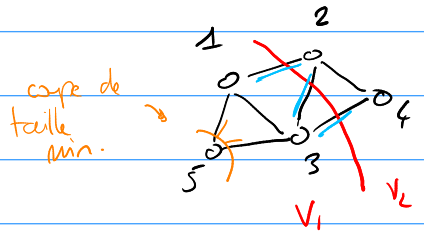
- ETH : exponential time hypothesis : ∄ d'algo en $O(2^{o(n)})$ pour résoudre SAT.
  ↳ On peut faire $2^{n/3}$ $2^{n/100}$ mais pas $2^{n/\log n}$ par ex. pour SAT

OPENAI : ETH est faux → ∃ algo en $O(2^{\frac{\log(\log(n))}{\sqrt{\log(n)}} \times n})$ pour SAT.

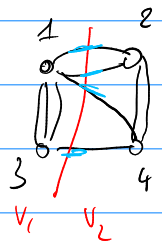
COUPE MIN DANS UN GRAPHE :



G. $V = \{1,2,3,4,5\}$ ← liste d'arêtes.
$E = \{12, 13, 15, 23, 24, 34, 35\}$

coupe : $(\{1,3,5\}, \{2,4\})$ de taille 3.

Ex de multigraphe : G_2 :

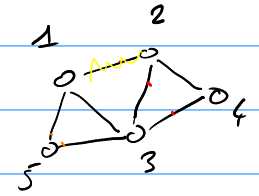


$V = \{1,2,3,4\}$
$E = \{12,12,13,13,13, 14, 24, 24, 34\}$.

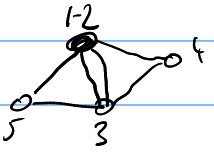
coupe $(\{1,3\}, \{2,4\})$ de taille 4.

Exemple de contraction :

G.



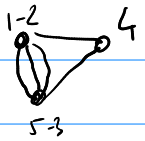
on contracte l'arête 12 :



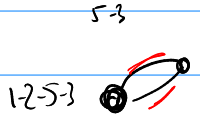
⚠ On met 2 arêtes entre 3 et 1-2.

⚠ l'arête (ou les arêtes) contractée disparaît.

On contracte 53 :



On contracte 12 53 :

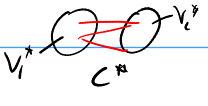


l'algo retourne les arêtes : 24 et 34.

↳ correspond à la coupe $(\{1,2,3,5\}, \{4\})$

Preuve du résultat sur l'algo de KARGER-MIN:

Soit C^* une coupe min ($C^* = (V_1^*, V_2^*)$). L'algo KARGERMIN renvoie C^* si il ne choisit jamais une arête qui traverse (V_1^*, V_2^*)



On va calculer la proba de cet événement :

On se place à une étape où il reste k sommets et où aucune arête de C^* n'a été contractée.

Remarque: chaque sommet a un degré (= nbre d'arêtes incidentes) $\geq |C^*|$.

[Sinon si sommet x avait un sommet $< |C^*|$ $(\{x\}, V\setminus\{x\})$ serait une coupe de taille < celle de C^*, ce qui est exclu.].

On va utiliser le lemme des poignées de main : (= nbre d'arêtes)

Dans un graphe G, on a: $\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2\, m(G)$

Ici: on a: $\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \geq k \times |C^*|$ donc $m(G) \geq \frac{k \cdot |C^*|}{2}$.

Proba de tirer une arête de $C^* = \frac{|C^*|}{m(G)} \leq \frac{|C^*|}{\frac{k \cdot |C^*|}{2}} = \frac{2}{k}$.

Proba de ne pas tirer une arête de $C^* \geq 1 - \frac{2}{k} = \frac{k-2}{k}$

Du coup, la proba de ne jamais tirer une arête de C^* est:

$$\frac{n-2}{n} \times \frac{(n-1)-2}{n-1} \times \frac{(n-2)-2}{n-2} \cdots \frac{3-2}{3}$$

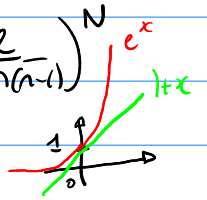
$$= \frac{(n-2)}{n} \times \frac{(n-3)}{n-1} \times \frac{(n-4)}{(n-2)} \times \cdots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$$ ☺ ☒

Lemme de répétition:

Au $i^{ème}$ essai la proba de ne pas trouver une coupe min est $< 1 - \frac{2}{n(n-1)}$

Après N répétitions, la proba de ne jamais avoir trouvé une coupe min est $< \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^N$

La proba de trouver une coupe min est $\geq 1 - \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^N$



Pour simplifier, on utilise: $\forall x \in \mathbb{R}\ \ 1+x \leq e^x$

On a: $\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^N \leq \left(e^{-\frac{2}{n(n-1)}}\right)^N = e^{-2N/n(n-1)}$. ☒