# HAX708X : Cours du 3 novembre 2026

- le précédent cours va être mis sur moodle
- Résumé du dernier cours : **A anneau principal** ; $p, q \geq 1$

$M \in M_{p,q}(A)$ ; morphisme de $A$-Modules

$$M : A^q \longrightarrow A^p$$
$$V \longmapsto MV$$

soit $s$ le rang de $M$ : déf 1 : $s = \text{rang}(\text{Image}(M)) \geq 0$

($\mathbb{K}$ = corps de fraction de $A$)

déf 2 : $M \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\tilde{M} : \mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^p$, $s = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Image}(\tilde{M}))$

Rq : $s = 0 \iff M = 0$

**Théorème** : supposons $s \geq 1$. Alors il existe une unique suite d'idéaux $(d_1) \supseteq (d_2) \supseteq \dots \supseteq (d_s)$ ($d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_s$)

telle que $M \underset{\circledast}{=} P \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_s & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$

avec $P \in GL_p(A) = \{ X \in M_p(A),\ \det(X) \in A^\times \}$

$Q \in GL_q(A)$

De plus $\circledast \iff A^p / \text{Image}(M) \simeq A^{p-s} \times A/(d_1) \times \dots \times A/(d_s)$

# Réduction des endomorphismes : $\mathbb{K}$ = un corps

$E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à $n \geq 1$

**Def :** $f, h \in End_{\mathbb{K}}(E)$ sont semblables si
$\exists g \in GL_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $f = g h g^{-1}$

**Not :** les classes d'équivalences $\mathcal{O} = \{ghg^{-1}, g \in GL_{\mathbb{K}}(E)\}$ sont appelées classes de similitude.

À $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$, on associe le $\mathbb{K}[X]$-module $E_f$ qui est égal à $E$ muni de l'action suivante

$$\begin{cases} P \cdot v = P(f)(v) \\ \forall P \in \mathbb{K}[X]. \end{cases}$$

**Prop :** ( $f$ est semblable à $h$ ) $\Longleftrightarrow$ ( les $\mathbb{K}[X]$-modules $E_f$ et $E_h$ sont isomorphes )

**Preuve:** $\Rightarrow$ soit $g \in GL_{\mathbb{K}}(E)$ t.q. $ghg^{-1} = f$

Alors $g h^n g^{-2} = f^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ : $\boxed{g P(h) g^{-1} = P(f)}$

$g : E \longrightarrow E$

$g \circ P(h) = P(f) \circ g$

$\rightarrow$ donc $g$ est un morphisme entre $E_h$ et $E_f$

$g : E_h \longrightarrow E_f$

$g(P \cdot v) = P \cdot (gv)$ $\forall v, \forall P$

l'action sur $E_h$ — l'action sur $E_f$

$g \circ P(h)(v) = P(f) \circ g(v)$, $\forall v, \forall P$

$g \circ P(h) = P(f) \circ g$ ⊛

$\Leftarrow$ idem

On doit comprendre la structure des

$\mathbb{K}[X]$-modules $E_f$

① $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal

② $E_f$ est un $\mathbb{K}[X]$-module de type fini

soit $e_1, \dots, e_n$ une base de $E$

$$E = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_n$$

$$\downarrow$$

$$E_f = \mathbb{K}[X]\cdot e_1 + \cdots + \mathbb{K}[X]\cdot e_n$$

---

soit $v \in E$ : $\boxed{\mathbb{K}[X]\cdot v \subseteq E_f}$

$$\mathbb{K}[X]\cdot v = \{ P(f)(v) ;\ P \in \mathbb{K}[X] \}$$
$$= \mathrm{Vect}\left( v, f(v), f^2(v), \dots, f^k(v) ;\ k \in \mathbb{N} \right)$$

$$\begin{array}{rccc} j_{f,v} : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X]\cdot v \\ & P & \longmapsto & P(f)(v) \end{array}$$

morphisme de $\mathbb{K}[X]$-modules

$\mathrm{Ker}(j_{f,v}) = \{ P,\ P\cdot v = 0 \}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

$\exists !$ polynôme unitaire $\boxed{\mu_{f,v} = X^{\ell} - \sum_{i=0}^{\ell-2} a_i X^i}$

tel que $\mathrm{Ker}(g_{f,v}) = (\mu_{f,v})$

---

① $\boxed{\mathbb{K}[X]/(\mu_{f,v}) \simeq \mathbb{K}[X].v}$

- $\mathcal{B}_v = (v, \dots, f^{\ell-2}(v))$ base de l'ev $\mathbb{K}[X].v$
- $\ell = \dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}[X].v)$
- $\mathbb{K}[X].v$ est un sev de $E$ stable par rapport à $f$
- $\mathrm{Mat}\left(f_{|\mathbb{K}[X].v}, \mathcal{B}_v\right) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{\ell-2} \\ & & 1 & a_{\ell-1} \end{pmatrix}$

la matrice compagnon associée à $\mu_{f,v}$ $\longleftarrow$ $C(\mu_{f,v})$

Rmq $\det(X\,\mathrm{Id}_\ell - C(\mu_{f,v})) = \mu_{f,v}$

## Cas particuliers :

**Def** $f$ est dit **cyclique** si $\exists\, v \in E$ tel que

$$E = \mathrm{Vect}\left( f^k(v),\ k \in \mathbb{N} \right)$$

**Prop :** $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$

$f$ est cyclique $\iff \exists\, \mathcal{B}$ base de $E$ telle que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = C(P)$$

avec $P$ égal au polynôme caractéristique de $f$.

$$\iff \chi_f = \mu_f$$

**Théorème :** $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$, $f \neq 0$.

$\exists!\ r \geq 1$

$\exists!$ famille $P_1, \dots, P_r$ de polynômes unitaires, $d^\circ P_i \geq 1$

$\exists$ famille $E_1, \dots, E_r$ de sous-ev de $E$

tels que ① $P_1 \mid P_2 \mid \cdots \mid P_r$

② $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$

③ . $f(E_i) \subseteq E_i$

- $f_{|E_i}$ est un endomorphisme cyclique
- $P_i$ = polynôme caractéristique de $f_{|E_i}$

**Vocabulaire :** les polynômes $P_1 | P_2 | \dots | P_n$ sont les invariants de similitude de $f$

**Preuve :** on utilise le Th suivant

**Th** soit $N$ un $A$-module de type fini, avec $A$ principal, avec $N \neq 0$.
Il existe $n_1, \dots, n_\ell \in N$ tels que

. $N = An_1 \oplus \dots \oplus An_\ell$

. $An_i \cong A/\mathrm{ann}_A(n_i)$

. $\mathrm{ann}_A(n_1) \supseteq \dots \supseteq \mathrm{ann}_A(n_\ell)$

↳ cette suite d'idéaux est unique.

On aura deux situations :

① $\mathrm{ann}_A(n_i) = 0$ : $An_i \cong A$

module libre

② $\mathrm{ann}_A(n_i) = (d_i) \neq 0$ : $An_i \cong A/(d_i)$

module de torsion

---

On applique cela au $\mathbb{K}[X]$ - module $E_f$ :

$\exists\, v_1, \dots, v_\ell \in E$ tels que

$$E_f = \mathbb{K}[X].v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}[X].v_\ell$$

On pose $E_i = \mathbb{K}[X].v_i$ :

Alors
$$\begin{cases} E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_\ell \\ f(E_i) \subseteq E_i \\ \mathrm{Mat}(f_{|E_i}) = C(P_i) \end{cases}$$

où $P_i = X^{n_i} - \sum_{j=0}^{n_i - 1} a_{ij} X^j$

est déterminé par la relation :

$$f^{n_i}(v_i) = \sum_{j=0}^{n_i - 1} a_{ij} f^j(v_i)$$

On a : • $P_i$ = polynôme caractéristique de $f_{|E_i}$

• $\mathbb{K}[X] \cdot v_i \cong \mathbb{K}[X]/(P_i)$

• $(P_1) \supseteq (P_2) \supseteq \dots \supseteq (P_e)$ / unique

$P_1 \mid P_2 \mid \dots \mid P_e$

---

**Prop** $E_f \cong \mathbb{K}[X]/(P_1) \times \dots \times \mathbb{K}[X]/(P_e)$

$\mathbb{K}[X]$-module

$P_2 \dots P_e$ invariants de similitude de $f$.

**Corollaire :** $f$ et $h$ semblable $\Leftrightarrow E_f \cong E_h$

$\Leftrightarrow$ $f$ et $h$ ont les mêmes invariants de similitude.

**Corollaire :** on prend $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E_1) \cup \dots \cup \mathcal{B}(E_\ell)$

$\mathcal{B}(E_i) = \{ v_{i_1}, f(v_{i_1}), \dots \}$

la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_\ell) \end{pmatrix}$

**Preuve**

$\chi_f = P_1 \dots P_\ell$ ← polynôme caractéristique

$\mu_f = P_n$ ← polynôme minimal

- ici $P_n = \mu_{f, v_n}$ divise par $\mu_f$ car

l'idéal $\{ P \mid P(f)(v_n) = 0 \}$ contient

l'idéal $\{ P \mid P(f) = 0 \}$

- $P_n(f) = 0$ car $\boxed{P_n(f|_{E_i}) = 0 \text{ et } P_i \text{ divise } P_n}$

$\Downarrow$

$P_n(f|_{E_i}) = 0 \quad \forall i$

$\psi_f$ divise $P_n$.

Exercice : $X \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente

$$d = \min\{k,\ X^k = 0\} \leq n$$

déterminer les invariants de similitude des polaires lorsque $d = n,\ n-1,\ n-2$

Plusieurs d'exercice : pages 4, 5, 6

FIN