MAX708X : Séance du 21 octobre 2026

Première application : Réduction des matrices dans $M_{p,q}(\mathbb{K})$

Déjà connu : $\mathbb{K}$ un corps soit $g \in M_n(\mathbb{K})$

$g \in GL_n(\mathbb{K}) \underset{\text{DEF 1}}{\Longleftrightarrow} \exists f \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $f \circ g = g \circ f = I_n$

$\underset{\text{DEF 2}}{\Longleftrightarrow} \det(f) \neq 0$.

Def : $M, M' \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

M est équivalente à $M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists P \in GL_p(\mathbb{K}) \\ \exists Q \in GL_q(\mathbb{K}) \\ M' = PMQ \end{cases}$

Def : $\operatorname{rang}(M) =$ dimension de $\operatorname{Im}_{\text{ap}}(M) \leq \inf(p,q)$

$M \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

Prop : M est équivalente à $M' \Longleftrightarrow \operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M')$

$\Longrightarrow \operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(PM) = \operatorname{rang}(PMQ) = \operatorname{rang}(M')$

$\Leftarrow$. $\operatorname{rang} \Pi = \operatorname{rang} \Pi' = 0 \Longrightarrow M = \Pi' = 0$ OK

. $\operatorname{rang} \Pi = \operatorname{rang} \Pi' = r$

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(\Pi) = \mathbb{K} f_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K} f_{i_r} \subset \mathbb{K}^p \\ \operatorname{Im}(\Pi') = \mathbb{K} f'_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K} f'_{i_r} \subset \mathbb{K}^p \end{cases}$$

Soient $(e_i)_{1 \le i \le n}$ tq $\Pi(e_i) = f_i$

Soient (e'_i) tq $\Pi(e'_i) = f'_i$

$$\mathbb{K}^q = \operatorname{Ker}(M) \oplus \mathbb{K} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K} e_n$$

$$\mathbb{K}^q = \operatorname{Ker}(\Pi') \oplus \mathbb{K} e'_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K} e'_n$$

On complète les familles libres (f_i) et (f'_i)

$\{ f_{i_1}, \dots, f_{i_p} \}$ base de $\mathbb{K}^p$

$\{ f'_{i_1}, \dots, f'_{i_p} \}$ ——— $\mathbb{K}^p$

$\{ e_{n+1}, \dots, e_q \}$ base de $\operatorname{Ker}(M)$

$\{ e'_{n+1}, \dots, e'_q \}$ base de $\operatorname{Ker}(M')$

$$\mathbb{K}^q = \mathbb{K}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_r \oplus \overbrace{\boxed{\mathbb{K}e_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_q}}^{\mathrm{Ker}(M)}$$

$$\mathbb{K}^q = \mathbb{K}e_1' \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_r' \oplus \underbrace{\boxed{\mathbb{K}e_{r+1}' \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_q'}}_{\mathrm{Ker}(M')}$$

$$\mathbb{K}^p = \overbrace{\boxed{\mathbb{K}f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}f_r}}^{\mathrm{Image}(M)} \oplus \mathbb{K}f_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}f_p$$

$$\mathbb{K}^p = \underbrace{\boxed{\mathbb{K}f_1' \oplus \dots \oplus \mathbb{K}f_r'}}_{\mathrm{Image}(M')} \oplus \mathbb{K}f_{r+1}' \oplus \dots \oplus \mathbb{K}f_p'$$

soit $\left| \begin{array}{l} P : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^p \text{ inversible} \\ P(f_i) = f_i', \ \forall i \end{array} \right.$

soit $\left| \begin{array}{l} Q : \mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^q \text{ inversible} \\ Q(e_j) = e_j', \ \forall j \end{array} \right.$

$\underline{i \leq r}$: $M(e_i) = f_i = P^{-1}(f_i') = P^{-1}M'(e_i')$
$= P^{-1}M'Q(e_i)$

$\underline{i > r}$: $M(e_i) = 0 = P^{-1}M'Q(e_i)$

Conclusion : $\boxed{M = P^{-1} M' Q}$

On travaille avec des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Anneau (non commutatif) $M_n(\mathbb{Z})$:

Def : $\boxed{M \in M_n(\mathbb{Z}) \text{ est inversible} \iff \exists P \in M_n(\mathbb{Z}),\ MP = PM = I_n}$

Not. $GL_n(\mathbb{Z}) = \{g \in M_n(\mathbb{Z}) \text{ inversible}\}$

Déterminant : $\det(M) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\tau(i)}$

$M = (m_{i,j})$

$\det : M_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\det(MP) = \det(M)\det(P)$

Condition nécessaire : si $MP = I_n$ alors

$\underbrace{\det(M)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\det(P)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$

Conclusion : si M est inversible alors $\det(M) = \pm 1$

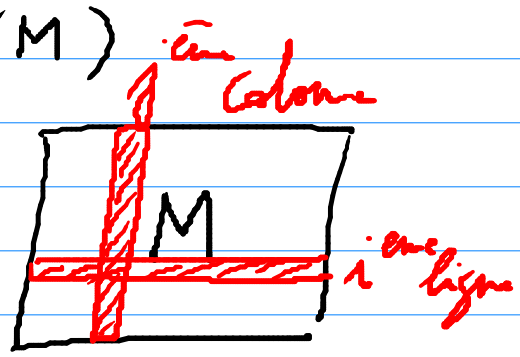
$\in M_n(\mathbb{Z})$ dans $M_n(\mathbb{Z})$

Formule universelle : $M \in M_n(\mathbb{Q})$

si $\det(M) \neq 0$

alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \, {}^t\mathrm{Co}(M)$

$\mathrm{Co}(M)_{ij} = (-1)^{i+j} \det$



si $M \in M_n(\mathbb{Z})$: ${}^t\mathrm{Co}(M) \in M_n(\mathbb{Z})$

si $\det M = \pm 1$, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \, {}^t\mathrm{Co}(M)$ est encore dans $M_n(\mathbb{Z})$.

Prop $\boxed{g \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det(g) = \pm 1}$

Rmq si A est un anneau commutatif

$g \in GL_n(A) \iff \begin{pmatrix} \exists h \in GL_n(A) \\ gh = hg = I_n \end{pmatrix} \iff \det(g) \in A^\times$

Matrices équivalentes dans $M_{p,q}(\mathbb{Z})$

Def $M, M' \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$ sont équivalentes

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists P \in GL_p(\mathbb{Z}),\ \exists Q \in GL_q(\mathbb{Z}) \\ M = PM'Q \end{array} \right)$$

une matrice $M \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$ est naturellement associée à un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules :

$$M : \mathbb{Z}^q \longrightarrow \mathbb{Z}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_q \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_q \end{pmatrix}$$

On associe $\mathbb{Z}$-modules :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(M) = \{ x \in \mathbb{Z}^q \mid Mx = 0 \} \subset \mathbb{Z}^q \\ \mathrm{Im}(M) = \{ Mx,\ x \in \mathbb{Z}^q \} \subset \mathbb{Z}^p \end{cases}$$

Prop : soient $M, M' \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(M') \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists Q \in GL_q(\mathbb{Z}) \\ M = M'Q \end{array} \right)$$

$\Leftarrow$ $\mathrm{Im}(\Pi) = M(\mathbb{Z}^q)$

si $M = \Pi' Q$, alors

$$M(\mathbb{Z}^q) = M'\big(Q(\mathbb{Z}^q)\big) = M'(\mathbb{Z}^q)$$

$\|$ $\|$

$\mathrm{Im}(M)$ $\mathrm{Im}(M')$

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(M') \subset \mathbb{Z}^p$

r = le rang du sous-module

Si $r = 0$: dans ce cas $M = M' = 0$, et donc M et Π' sont équivalentes.

Si $r \geq 1$: soit $f_{01}, \dots, f_{0r} \in \mathbb{Z}^p$

tels que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(\Pi') = \mathbb{Z} f_{01} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} f_{0r}$

soient $\begin{cases} e_1, \dots, e_r \in \mathbb{Z}^q \\ e'_1, \dots, e'_r \in \mathbb{Z}^q \end{cases}$ tels que

$$f_{0i} = M(e_i) = M'(e'_i)$$

Alors $\begin{cases} \mathbb{Z}^q = \mathrm{Ker}(M) \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \\ \mathbb{Z}^q = \mathrm{Ker}(M') \oplus \mathbb{Z}e_1' \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n' \end{cases}$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{Z}^q$

$Mx \in \mathrm{Im}(M)$

$\exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que

(*) $Mx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i$

$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \cdot M(e_i)$

$= M\left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \cdot e_i \right)$

(*) $\Rightarrow \tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i \in \mathrm{Ker}(M)$

On a la décomposition de $x \in \mathbb{Z}^q$

$$x = \underbrace{\tilde{x}}_{\in \mathrm{Ker}(\Pi)} + \sum_{i=n}^{n} \alpha_i \cdot e_i$$

et celle-ci est unique.

preuve du .....

Soient $\{e_{r+1}, \dots, e_q\}$ base de $Ker(M)$;
et $\{e'_{r+1}, \dots, e'_q\}$ base de $Ker(M')$

$Ker(M)$

$$\mathbb{Z}^q = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r \oplus \boxed{\mathbb{Z}e_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_q}$$

$$\mathbb{Z}^q = \mathbb{Z}e'_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e'_r \oplus \boxed{\mathbb{Z}e'_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e'_q}$$

$Ker(M')$

Doit $Q : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{Z}^q$ morphisme bijectif tel que
$Q(e_i) = e'_i$, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$

Alors pour $i \leq r$

$$M(e_i) = f_i = M'(e'_i) = M'Q(e_i)$$

pour $i > r$

$$M(e_i) = 0 = M'(e'_i) = M'Q(e_i)$$

Conclusion $M(e_i) = M'Q(e_i)$

pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$

Alors $\boxed{M = M'Q \text{ dans } M_{p,q}(\mathbb{Z})}$

Maintenant, on travaille avec des matrices $P \in GL_p(\mathbb{Z})$.

Lemme : E et F deux $\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}^p$

$$\left(\begin{array}{l} \exists\, P \in GL_p(\mathbb{Z}) \\ \text{tel que } P(E) = F \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\mathbb{Z}^p/E \simeq \mathbb{Z}^p/F \right)$$

→ cette condition est plus forte que $E \simeq F$

$\rang E = \rang F$

→ $P : \mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathbb{Z}^p$ est un isomorphisme

qui induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^p/E & \longrightarrow & \mathbb{Z}^p/F \\ v+E & \longrightarrow & Pv+F \end{array}$$

↳ l'application réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^p/F & \longrightarrow & \mathbb{Z}^p/E \\ w+F & \longrightarrow & P^{-1}w+E \end{array}$$

⟸ E est un sous-module de $\mathbb{Z}^p$

Le théorème de la base adaptée :

$\exists f_1, \dots, f_p \in \mathbb{Z}^p$; $\exists s \in \mathbb{N}$; $\exists d_1 | \dots | d_s$ $d_i \geq 1$

tels que : $\begin{cases} f_1, \dots, f_p & \text{base de } \mathbb{Z}^p \\ d_1 f_1, \dots, d_s f_s & \text{base de } E \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathbb{Z}^p = \mathbb{Z}f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}f_p \oplus \mathbb{Z}f_{s+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}f_p \\ E = \mathbb{Z}d_1 f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}d_s f_s \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}^p/E \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s}$$

On fait la même chose avec F

$$\begin{cases} \mathbb{Z}^p = \mathbb{Z}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}f_p \\ F = \mathbb{Z}d'_1 f'_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d'_{s'} f_{p'} \end{cases}$$

et on aura

$$\mathbb{Z}^p/F \simeq \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d'_{s'}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s'}$$

si $\mathbb{Z}^p/E \simeq \mathbb{Z}^p/F$, alors

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s} \simeq \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d'_{s'}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s'}$$

$d_1 \mid \cdots \mid d_s$ $\quad$ $d_i \geq 2$ $\quad$ et $\quad$ $d'_1 \mid \cdots \mid d'_{s'}$ $\quad$ $d'_i \geq 2$

Grâce à l'unicité de la décomposition, on a :

① $s = s'$

② $d_i = d'_i \; ; \; \forall i = 1, \ldots, s$

On a $\begin{cases} \mathbb{Z}^p = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_p \\ E = \mathbb{Z}d_1 e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d_n e_n \end{cases}$

$$\mathbb{Z}^p = \mathbb{Z}e_1' \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_p'$$

$$F = \mathbb{Z}d_1 e_1' \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d_n e_n'$$

Soit $P : \mathbb{Z}^p \longrightarrow \mathbb{Z}^p$ l'isomorphisme tel que

$$P e_i = e_i' \quad ; \forall i$$

Alors $P(E) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} d_i e_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} d_i e_i' = F$$

CQFD

Def M équivalente à $M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists P \in GL_p(\mathbb{Z}) \\ \exists Q \in GL_q(\mathbb{Z}) \\ \text{tq } M = PM'Q \end{cases}$

$M, M' \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$

Théorème :

① M est $\boxed{\text{équivalent}}$ à $M' \iff \mathbb{Z}^p/\mathrm{Im}(M) \simeq \mathbb{Z}^p/\mathrm{Im}(M')$

unicité

② $\exists!\, s \in \mathbb{N},\ \exists!\, d_1 \backslash \dots \backslash d_s$ $(d_i \geq 1)$

tel que M est $\boxed{\text{équivalent}}$ à

$$\Delta(d_1, \dots, d_s) = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_s & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Corollaire $\boxed{M \text{ est équivalent à } \Delta(d_1, \dots, d_s) \iff \mathbb{Z}^p/\mathrm{Im}(M) = \mathbb{Z}^{p-s} \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}}$

Preuve du point ① :

$$\mathbb{Z}^p/\mathrm{Im}(M) \simeq \mathbb{Z}^p/\mathrm{Im}(M') \iff \left(\begin{array}{l} \exists P \in GL_p(\mathbb{Z}) \\ \text{tel que} \\ \mathrm{Im}(M) = P(\mathrm{Im}(M')) \end{array} \right.$$

⊛

$$P(\mathrm{Im}(M')) = P(M'(\mathbb{Z}^q)) = \mathrm{Im}(PM')$$

$$\circledast \iff \exists\, P \in GL_p(\mathbb{Z}) \text{ t.q.}$$

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(PM')$$

$$\iff \left(\begin{array}{l} \exists\, P \in GL_p(\mathbb{Z}),\ \exists\, Q \in GL_q(\mathbb{Z}) \\ \text{tels que} \quad M = PM'Q \end{array} \right)$$

$$\iff M \text{ est semblable à } M'.$$

Preuve du point ② : $\mathrm{Im}(M)$ sous-module de $\mathbb{Z}^p$

Soit s le rang de $\mathrm{Im}(M)$.

le quotient $\mathbb{Z}^p / \mathrm{Im}(M)$ est $\mathbb{Z}$-module de type fini. Il admet la description suivante :

$$\mathbb{Z}^p / \mathrm{Im}(M) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s}$$

avec $d_1 \mid \cdots \mid d_s$

On regarde $\Delta(d_1, \ldots, d_s) \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$

$e_1, \dots, e_q$ base canonique de $\mathbb{Z}^q$

$f_1, \dots, f_p$ ——————— $\mathbb{Z}^p$

$$\Delta(d_1, \dots, d_s)\, e_i = \begin{cases} d_i f_i & \text{si } i \leq s \\ 0 & \text{si } i > s \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}(\Delta(d_1, \dots, d_s)) = \mathbb{Z} d_1 f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} d_s f_s$$

$$\mathbb{Z}^p = \mathbb{Z} f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} f_s \oplus \mathbb{Z} f_{s+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} f_p$$

Alors $\mathbb{Z}^p / \mathrm{Im}(\Delta(d_1, \dots d_s)) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{p-s}$

$\cong \mathbb{Z}^p / \mathrm{Im}(M)$

Conclusion : grâce au point (1), on

sait conclure que M est équivalente à

$\Delta(d_1, \dots, d_s)$

Unicité de s : M, $\Delta(d_1 \dots, d_s) \in M_{p,q}(\mathbb{Q})$

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathrm{rang}_{\mathbb{Q}} \Delta(d_1, \dots d_s) = s$$

Unicité de $a_1, \dots, a_s$:

$$\mathbb{Z}^p / I_n(\Pi) \cong \underbrace{\mathbb{Z}^{p-s} \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}}$$

unique si on impose

que $d_1 | \dots | d_s$

Fin de la preuve

Question algorithmique

$$M \in M_{p,q}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \Delta(d_1, \dots, d_s)$$

Travail sur les lignes et les colonnes :

① modifier $M \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$ au niveau des lignes :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} L_i \leftarrow L_i - \sum_{j \neq i} a_j L_j \\ L_i \leftrightarrow L_j \end{pmatrix}$$

on multiplie à gauche par $P \in GL_p(\mathbb{Z})$

② modifie $M \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$ au niveau des colonnes

multiplication à droite par $Q \in GL_q(\mathbb{Z})$.

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \neq 0$$

on pose $\boxed{\delta_1 = \mathrm{pgcd}(m_{ij}) \geq 1}$

$\boxed{\text{Lemme}}$ $M \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$

M est équivalente à $\boxed{\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{M'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}$

où $M' \in M_{p-1,q-1}(\mathbb{Z})$ et

$\boxed{\text{tous les coefficients de } M' \text{ sont divisibles par } \delta_1.}$

En particulier $\delta_1 = d_1$

$$M \simeq \Delta(d_1, \dots, d_s)$$

$$M = M^{[0]} = \begin{pmatrix} \boxed{*} & \\ & m_{ij}^{[0]} \end{pmatrix} \xrightarrow{M^{[1]}} \begin{pmatrix} m_{1,1}^{[1]} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$|m_{i_0 j_0}| = \inf\left(\left\{ |m_{ij}| \,;\, (i,j) \right\} - \{0\}\right)$$

$$\left|m_{11}^{[1]}\right| = \left|m_{i_0 j_0}\right| = \mathrm{Inf}\left(|m_{ij}| \neq 0\right)$$

$$\left|m_{11}^{[1]}\right| \leq \left|m_{11}\right|$$

<u>1er cas</u> :

$$\left|\begin{array}{ll} m_{11}^{[1]} \setminus m_{i1}^{[1]} & \forall i \geq 2 \\ m_{11}^{[1]} \setminus m_{1j}^{[1]} & \forall j \geq 2 \end{array}\right.$$

alors $M^{[1]} \curvearrowright M^{[2]} = \begin{pmatrix} m_{11}^{[2]} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

<u>2ème cas</u> $m_{11}^{[2]}$ ne divise pas tous les $m_{i1}^{[1]}$ ou $m_{1j}^{[1]}$

$$M^{[1]} \curvearrowright M^{[2]} = \begin{pmatrix} m_{11}^{[1]} & \cdots & m_{1j}^{[2]} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

avec $\left|m_{ij}^{2}\right| < m_{11}^{[1]}$

alors $M^{[2]} \rightsquigarrow M^{[3]} = \begin{pmatrix} m_{11}^{[3]} & \cdots \\ | & \end{pmatrix}$

$$\left|m_{11}^{[3]}\right| < m_{11}^{[2]} \leqslant m_{11}^{[0]}$$

donc $\exists\, k$ t.q. $\Pi = \Pi^{(0)} \simeq \Pi^{[k]} = \begin{pmatrix} m_{11}^{[k]} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (M^{[k]})' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

avec $\left|m_{11}^{[k]}\right| \leqslant \left|m_{11}^{[1]}\right| = \min\left(\{|m_{ij}| \neq 0\}\right)$

1er cas $\left|m_{11}^{[k]}\right.$ divise tous les coeff de $(\Pi^{[k]})'$

FIN

2ème cas $\exists\, i_0 \geqslant 2,\ j_0 \geqslant 2$ t.q. $m_{11}^{[k]}$ ne divise pas $m_{i_0 j_0}^{[k]}$

$$M^{[k]} = \begin{pmatrix} m_{11}^{[k]} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & m_{i_0 j_0}^{[k]} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow M^{[k+1]} = \begin{pmatrix} m_{11}^{[k]} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ m_{i_0 j_0}^{[k]} & & \cdots & \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $M^{k+2} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(k+2)} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$

$$\left| m_{11}^{[k+2]} \right| < \left| m_{11}^{[k]} \right|$$

Détermination de $(d_1, \dots, d_s)$ au moyen des mineurs.

$M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{Z})$ non nulle

$\mathrm{rg}(M) \geq s = \mathrm{rang}_{\mathbb{Q}}(M) \geq 1$

vocabulaire : un mineur de M d'ordre r est un nombre de la forme $\det(M_{I,J}) \in \mathbb{Z}$

$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

$I \subset \{1, \dots, p\}$, $J \subset \{1, \dots, q\}$, $\#I = \#J = r$

$M_{IJ} = (m_{ij})_{i \in I, j \in J} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{Z})$

relation dans $\Pi_m(\mathbb{Z})$

$$M = P \begin{pmatrix} d_r & & \\ & \ddots & \\ 0 & & d_0 \end{pmatrix} Q$$

$d_i \neq 0 \quad \forall i$

$M \in \Pi_{pq}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \operatorname{rang}_{\mathbb{Q}}(\Pi) =$ dimension du $\mathbb{Q}$-ecv $\{Mx, x \in \mathbb{Q}^q\} = M(\mathbb{Q})$

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}}(M) = \operatorname{rang}_{\mathbb{Q}}\left(\Delta(d_1, \dots, d_0)\right) = \Delta$$

$$\delta_k(M) = pgcd\left(\det(M_{I,J}) \;\middle|\; \#I = \#J = k\right)$$

Ex $\delta_1(\Pi) = pgcd(m_{ij})$

$$\boxed{\delta_k : M_{p,q}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{N}}$$

Propriété : si $P \in GL_p(\mathbb{Z})$ et $Q \in GL_q(\mathbb{Z})$ et $\Pi \in M_{p,q}(\mathbb{Z})$

Alors $\delta_k(M) = \delta_k(PM)$

$= \delta_k(\Pi Q)$

$= \delta_k(P \Pi Q)$

↳ On fera cela en exercice après les vacances.

Comme M est équivalente à $\Delta(d_1, \dots, d_s)$

Alors $\boxed{\delta_k(\Pi) = \delta_k(\Delta(d_1, \dots, d_s)) \quad \forall k \geq 1}$

Δ

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_s \end{pmatrix} \qquad d_1 \mid \dots \mid d_s$$

$\delta_1(\Delta) = d_1$

$S_2(\Delta) = ?$ $\quad I, J$ de cardinal 2

$$\det(\Delta_{I,J}) = \begin{cases} 0 \\ d_\alpha d_\beta & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$\delta_2(\Delta) = pgcd\left(\det(\Delta_{IJ}) \;\middle|\; \#I = \#J = 2\right)$$

$$= d_1 d_2$$

De même $\delta_k(\Delta) = d_1 \cdots d_k$ si $k \leq \Delta$

si $k > \Delta = \operatorname{rang}(M)$, alors $\delta_k(\Delta) = 0$

Conclusion : M équivalente à

$$\Delta(d_1, \ldots, d_s)$$

$$d_1 = \delta_1(M)$$
$$d_2 = \frac{\delta_2(M)}{\delta_1(M)}$$
$$\vdots$$
$$d_k = \frac{\delta_k(M)}{\delta_{k-1}(M)} \quad \forall\ k \leq s$$

Après les vacances, on abordera une autre application : réduction des endomorphismes ou en $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pas de CC1 à la date du Mercredi 4 novembre

$$\left| \begin{array}{l} M : \mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ M = M_{p,q}(\mathbb{K}) \end{array} \right.$$

$$\operatorname{rang}(M) = \dim_{\mathbb{K}}\left(\text{Image}(M)\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} I \subset \{1, \dots, p\} \\ J \subset \{1, \dots q\} \\ \#I = \#J = r \leqslant \min(p,q) \end{array} \right.$$

Exercice : si $r > \operatorname{rang} M$, $\det(M_{I,J}) = 0$

$\operatorname{rang}(M_{I,J}) \leqslant \operatorname{rang}(M)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^q & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}^p \\ \text{projection} \downarrow & & \uparrow \text{injection} \\ \mathbb{K}^r & \xrightarrow{M_{I,J}} & \mathbb{K}^r \end{array}$$

$\exists\, I_0, J_0$, $\# I_0 = \# J_0 = \text{rang}(M)$

et tel que $\det(M_{I_0 J_0}) \neq 0$

Conclusion $M \neq 0$

$$\text{rang}(M) = \sup\left(n \geqslant 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, I, J \text{ de cardinal } n \\ \det(M_{I,J}) \neq 0 \end{array} \right)$$

FIN