HAP704P « Atomes, molécules et rayonnement » — 2026

Correction du TD 3 : Addition de moments cinétiques

Exercice 5 : Spin-l + spin-$\frac{1}{2}$

Question 1 : valeurs propres de $\vec{L}^2$, L_z, $\vec{S}^2$, S_z

Les opérateurs $L_{x,y,z}$ forment une représentation de spin-l ($l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$). Les états propres communs $|l, m_l\rangle$ vérifient

$$\vec{L}^2|l, m_l\rangle = \hbar^2\, l(l+1)\,|l, m_l\rangle, \qquad L_z|l, m_l\rangle = \hbar\, m_l\,|l, m_l\rangle, \qquad m_l \in \{-l,\, -l+1,\, \ldots,\, l-1,\, l\}.$$

Il y a donc $2l+1$ valeurs possibles de m_l.

Pour le spin-$\frac{1}{2}$ ($s = \frac{1}{2}$), les états propres $|\pm\rangle$ vérifient

$$\vec{S}^2|\pm\rangle = \hbar^2\, s(s+1)|\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\,|\pm\rangle, \qquad S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\pm\rangle.$$

Autrement dit $m_s = \pm\frac{1}{2}$, et $\vec{S}^2$ est proportionnel à l'identité dans l'espace de spin.

Question 2 : nombres quantiques du moment cinétique total

L'espace des états (pour l fixé) est le produit tensoriel $\mathcal{E}_l \otimes \mathcal{E}_{1/2}$, de dimension $2(2l+1)$. D'après la règle d'addition des moments cinétiques (« règle du triangle »), j prend les valeurs

$$|l - \tfrac{1}{2}| \leq j \leq l + \tfrac{1}{2} \quad \text{par pas de 1,}$$

soit, puisque $l \geq 1$,

$$\boxed{j = l + \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad j = l - \tfrac{1}{2}}$$

Ce sont les deux représentations irréductibles contenues dans $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$: $l \otimes \frac{1}{2} = (l + \frac{1}{2}) \oplus (l - \frac{1}{2})$.

Valeurs propres associées :

— pour $j = l + \frac{1}{2}$: $\vec{J}^2 \to \hbar^2\,(l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2})$, $J_z \to \hbar m_j$ avec $m_j \in \{-(l+\frac{1}{2}), \ldots, l+\frac{1}{2}\}$ $(2l+2$ états) ;

— pour $j = l - \frac{1}{2}$: $\vec{J}^2 \to \hbar^2\,(l-\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2})$, $J_z \to \hbar m_j$ avec $m_j \in \{-(l-\frac{1}{2}), \ldots, l-\frac{1}{2}\}$ $(2l$ états).

Les m_j sont demi-entiers. On vérifie la conservation du nombre d'états :

$$(2l+2) + 2l = 2(2l+1).$$

Question 3 : expression de $\vec{J}^2$

Comme $\vec{L}$ et $\vec{S}$ agissent sur des espaces différents, chaque composante de $\vec{L}$ commute avec chaque composante de $\vec{S}$. Donc

$$\vec{J}^2 = (\vec{L}+\vec{S})^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + \vec{L}\cdot\vec{S} + \vec{S}\cdot\vec{L} = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\,\vec{L}\cdot\vec{S},$$

avec $\vec{L}\cdot\vec{S} = L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z$.

Développons $L_+S_- + L_-S_+$:

$$\begin{aligned} L_+S_- &= (L_x + iL_y)(S_x - iS_y) = L_xS_x + L_yS_y - iL_xS_y + iL_yS_x, \\ L_-S_+ &= (L_x - iL_y)(S_x + iS_y) = L_xS_x + L_yS_y + iL_xS_y - iL_yS_x. \end{aligned}$$

En sommant, les termes croisés se compensent :

$$L_+S_- + L_-S_+ = 2\,(L_xS_x + L_yS_y).$$

D'où $2\,\vec{L}\cdot\vec{S} = L_+S_- + L_-S_+ + 2L_zS_z$, et finalement

$$\boxed{\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + L_+S_- + L_-S_+ + 2\,L_zS_z}$$

Question 4 : action sur $|l,l\rangle \otimes |+\rangle$ et coefficients de Clebsch-Gordan

Notons $|\Phi\rangle \equiv |l, m_l = l\rangle \otimes |+\rangle = |l\,\tfrac{1}{2};\, l, +\tfrac{1}{2}\rangle$. On rappelle les propriétés des opérateurs d'échelle :

$$L_+|l,l\rangle = 0 \quad (m_l = l \text{ est maximal}), \qquad S_+|+\rangle = 0, \qquad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle.$$

Action de J_z.

$$J_z|\Phi\rangle = (L_z + S_z)|\Phi\rangle = \Big(\hbar\, l + \frac{\hbar}{2}\Big)|\Phi\rangle = \hbar\Big(l + \frac{1}{2}\Big)|\Phi\rangle.$$

Action de $\vec{J}^2$. On utilise le résultat de la question 3, terme par terme :

$$\begin{aligned} \vec{L}^2|\Phi\rangle &= \hbar^2\, l(l+1)|\Phi\rangle, \\ \vec{S}^2|\Phi\rangle &= \tfrac{3}{4}\hbar^2|\Phi\rangle, \\ L_+S_-|\Phi\rangle &= \big(L_+|l,l\rangle\big) \otimes \big(S_-|+\rangle\big) = 0 \otimes \hbar|-\rangle = 0, \\ L_-S_+|\Phi\rangle &= \big(L_-|l,l\rangle\big) \otimes \big(S_+|+\rangle\big) = 0, \\ 2L_zS_z|\Phi\rangle &= 2\,(\hbar l)\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)|\Phi\rangle = \hbar^2\, l\,|\Phi\rangle. \end{aligned}$$

En sommant :

$$\vec{J}^2|\Phi\rangle = \hbar^2\Big(l^2 + l + \frac{3}{4} + l\Big)|\Phi\rangle = \hbar^2\Big(l^2 + 2l + \frac{3}{4}\Big)|\Phi\rangle = \hbar^2\Big(l + \frac{1}{2}\Big)\Big(l + \frac{3}{2}\Big)|\Phi\rangle.$$

Or $\big(l + \tfrac{1}{2}\big)\big(l + \tfrac{3}{2}\big) = j(j+1)$ avec $j = l + \tfrac{1}{2}$.

Conclusion. L'état produit $|\Phi\rangle$ est vecteur propre de $\vec{J}^2$ et de J_z avec les nombres quantiques $j = l + \frac{1}{2}$ et $m_j = l + \frac{1}{2}$. On peut donc identifier (avec la convention de phase usuelle de Condon–Shortley, qui rend ce coefficient réel positif) :

$$\boxed{|l\,\tfrac{1}{2};\, j = l + \tfrac{1}{2},\, m_j = l + \tfrac{1}{2}\rangle = |l\,\tfrac{1}{2};\, m_l = l,\, m_s = +\tfrac{1}{2}\rangle = |l,l\rangle \otimes |+\rangle}$$

En comparant avec la définition $|l\,\frac{1}{2}; j, m_j\rangle = \sum_{m_s,m_l} |l\,\frac{1}{2}; m_l, m_s\rangle\langle l\,\frac{1}{2}; m_l, m_s|l\,\frac{1}{2}; j, m_j\rangle$, on lit directement les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\boxed{\langle l\,\tfrac{1}{2};\, m_l,\, m_s|l\,\tfrac{1}{2};\, j = l+\tfrac{1}{2},\, m_j = l+\tfrac{1}{2}\rangle = \delta_{m_l,l}\,\delta_{m_s,+\frac{1}{2}}}$$

c'est-à-dire un seul coefficient non nul, égal à 1 (pour $m_l = l$, $m_s = +\frac{1}{2}$) ; tous les autres sont nuls.

Remarque (argument alternatif). Le résultat était prévisible : comme $J_z = L_z + S_z$, un état de m_j donné ne peut être construit qu'à partir d'états produits avec $m_l + m_s = m_j$. Pour $m_j = l + \frac{1}{2}$ (valeur maximale), il n'existe qu'un seul état produit, $|l, l\rangle \otimes |+\rangle$. Cette valeur de m_j n'apparaît que dans le multiplet $j = l + \frac{1}{2}$; l'état $|j = l + \frac{1}{2}, m_j = l + \frac{1}{2}\rangle$ est donc nécessairement cet état produit (à une phase près).

Exercice 6 : Spin-2 + spin-$\frac{1}{2}$ + spin-$\frac{1}{2}$

Question 1 : moment cinétique total de l'électron

On compose $l = 2$ et $s = \frac{1}{2}$. D'après l'exercice 5 (avec $l = 2$) :

$$\boxed{j = \tfrac{5}{2} \quad \text{ou} \quad j = \tfrac{3}{2}}$$

Valeurs de m_j associées :

— $j = \frac{5}{2}$: $m_j \in \{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$ (6 états) ;

— $j = \frac{3}{2}$: $m_j \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ (4 états).

Vérification : $6 + 4 = 10 = (2 \times 2 + 1) \times (2 \times \frac{1}{2} + 1) = 5 \times 2$.

En notation spectroscopique, il s'agit des niveaux $d_{5/2}$ et $d_{3/2}$.

Question 2 : couplage avec le spin nucléaire $I = \frac{1}{2}$

On compose maintenant $\vec{K} = \vec{J} + \vec{I}$ avec $i = \frac{1}{2}$. Pour chaque valeur de j, la règle du triangle donne $k = j \pm \frac{1}{2}$:

— à partir de $j = \frac{5}{2}$: $k = 3$ ou $k = 2$;

— à partir de $j = \frac{3}{2}$: $k = 2$ ou $k = 1$.

Les valeurs possibles sont donc

$$\boxed{k \in \{1,\, 2,\, 3\}}$$ la valeur $k = 2$ apparaissant *deux fois* (une fois pour chaque j).

Pour chaque k, m_k est entier et prend les $2k + 1$ valeurs $-k, \ldots, k$:

j	k	valeurs de m_k	nombre d'états
$\frac{5}{2}$	3	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$	7
$\frac{5}{2}$	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	5
$\frac{3}{2}$	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	5
$\frac{3}{2}$	1	$-1, 0, 1$	3

Les valeurs possibles de m_k sont donc les entiers de -3 à 3.

Question 3 : dénombrement des vecteurs de base

Base des états produits $|l=2, m_l\rangle \otimes |m_s\rangle \otimes |m_i\rangle$:

$$(2l+1)(2s+1)(2i+1) = 5 \times 2 \times 2 = 20.$$

Base des vecteurs propres de $\vec{K}^2$ et K_z (on peut ajouter $\vec{J}^2$ pour distinguer les deux multiplets $k=2$) :

$$\underbrace{7}_{k=3} + \underbrace{5}_{k=2,\, j=5/2} + \underbrace{5}_{k=2,\, j=3/2} + \underbrace{3}_{k=1} = 20.$$

(On peut aussi passer par la base intermédiaire $|j, m_j\rangle \otimes |m_i\rangle$: $(6+4) \times 2 = 20$.)

Les deux bases comptent bien le même nombre de vecteurs, comme il se doit puisqu'elles engendrent le même espace de Hilbert de dimension 20.