

Feuille d'exercices 5

SUITES EXTRAITES, $\liminf$, $\limsup$

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Soit (u_n) la suite des décimales de π. Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.

Exercice 2. Soient (u_n) une suite réelle et $[a, b]$ un segment tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, b]$. Montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) est dans $[a, b]$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Est-il vrai que
(a) si u_n tend vers $+\infty$, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers $+\infty$?
(b) si (u_n) est croissante, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est croissante ?
(c) si (u_n) est bornée, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée ?
(d) si (u_n) est périodique, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est périodique ? (voir l'exercice 12.)

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Exercice 5. Soient (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.
(a) Montrer que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers ℓ.
(b) À quelle condition sur les extractions φ_1, φ_2 a-t-on l'équivalence

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \left(u_{\varphi_1(n)}\right) \text{ et } \left(u_{\varphi_2(n)}\right) \text{ convergent vers } \ell \ ?$$

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que (u_{2n}) converge, que (u_{2n+1}) converge et que (u_{3n}) converge. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Déterminer les suites de terme général $\underline{u}_n = \inf\{u_p \mid p \geq n\}$ et $\overline{u}_n = \sup\{u_p \mid p \geq n\}$. En déduire les limites inférieure et supérieure de (u_n).

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
(a) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et une extraction φ tels que $(u_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ.
(b) En déduire que (u_n) admet une sous-suite monotone.

Exercice 9. Montrer que
(a) $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
(b) $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que (u_n) est bornée et qu'elle a une seule valeur d'adhérence. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 11. On admet qu'il existe une suite réelle (u_n) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite réelle (v_n) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0,1]\cup[2,4]$.

Exercice 12. Soit (v_n) la suite donnée par $v_n = 0$ si n est pair et $v_n = 1$ si n est impair.

(a) Montrer que toute suite (w_n) à valeurs dans $\{0,1\}$ est une sous-suite de (v_n).

(b) Montrer qu'il existe une suite à valeurs dans $\{0,1\}$ qui n'est pas périodique.

Exercice 13. Le but de l'exercice est de démontrer le

lemme sous-additif. *Soit* (u_n) *une suite telle que* $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leq u_n + u_m$. *Alors la suite* $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ *tend vers* $\ell = \inf\left\{ \dfrac{u_q}{q} \,\middle|\, q \in \mathbb{N}^* \right\} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

(a) Montrer que $\forall p, q \in \mathbb{N},\ u_{pq} \leq p u_q$.

(b) Soient $n, q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n \geq q$. *Soit* r *le reste de la division euclidienne de* n *par* q, *c'est-à-dire l'unique entier tel que* $n = pq + r$ *avec* $p \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq r < q$.
Montrer que $u_n \leq \dfrac{n}{q} u_q + u_r$.

(c) En déduire que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{u_q}{q}$.

(d) Prouver le lemme sous-additif.